

## 2次方程式を解く

講師

湯浅 弘一

## 1 方程式とは

$\square + 5 = 8$  となる  $\square$  はなんですか？

$\square = 3$  です。

この  $\square$  を  $x$  にすると上の式は

$$x + 3 = 8$$

となります。

この等式  $x + 3 = 8$  は  $x = 5$  のときに成り立ちます。

このように、式の中の文字  $x$  にある値を代入して成り立つ等式を方程式といいます。

この方程式を成り立たせる  $x$  の値をこの方程式の解といい、

この解をすべて求めることを方程式を解くといいます。

## 例題

4つの式のうち、2次方程式はどれでしょうか？

A  $3x + 1 = 7$

B  $x^2 - 5x + 6$

C  $x^2 - 5x + 6 = 0$

D  $x^2 = 4$

## 【解説】

Bは「=」がないため、方程式ではありません。

Aは  $x$  が含まれる項が1次の項だけなので、1次方程式です。

よって答えは、CとDです。

やってみよう!

1 次方程式  $3x - 1 = 8$  を解きなさい。

【答え】

$$3x - 1 = 8$$

$$3x = 8 + 1$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

※ 1 次方程式は  $x$  を含む項を左辺に、定数項を右辺に移項するのが原則です。

やってみよう!

1 次方程式  $3(x - 2) - 2 = x$  を解きなさい。

【答え】

展開してカッコをはずします。

$$3(x - 2) - 2 = x$$

$$3x - 6 - 2 = x$$

$$3x - x = 2 + 6$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

## 2 2次方程式を因数分解で解く

1 次の項がない 2 次方程式は、平方根を使って解くことができます。

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

3 2次方程式を因数分解で解く

2次方程式を因数分解で解く方法もあります。

たとえば  $AB = 0$  となる  $A$  や  $B$  は何でしょうか？

すぐにわかることは  $A$  または  $B$  が  $0$  だということです。

両方同時に  $0$  の場合もあります。この  $AB = 0$  という式のイメージを使います。

例題

2次方程式  $x^2 - 5x + 6 = 0$  を解きなさい。

【解説】

$x^2 - 5x + 6 = 0$  の左辺を因数分解すると

$(x - 2)(x - 3) = 0$  です。

ということは、 $x - 2 = 0$  または  $x - 3 = 0$  ですから

$x = 2$  または  $x = 3$  です。

これを、 $x = 2, 3$  とかくこともできます。

やってみよう!

2次方程式  $x^2 + 3x - 4 = 0$  を解きなさい。

【答え】

$x^2 + 3x - 4 = 0$  の左辺を因数分解すると

$(x + 4)(x - 1) = 0$

よって、 $x + 4 = 0$  または  $x - 1 = 0$

つまり、 $x = -4$  または  $x = 1$

例題

2次方程式  $x^2 - 14x + 49 = 0$  を解きなさい。

【解説】

$x^2 - 14x + 49 = 0$

$(x - 7)^2 = 0$

$x = 7$  ※2つの解が同じになることを**重解**といいます。

4 2次方程式を解の公式で解く

2次方程式を解くための公式として解の公式があります。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) の解は、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例題

2次方程式  $2x^2 + 3x - 4 = 0$  を解きなさい。

【解説】

$2x^2 + 3x - 4 = 0$  を  $ax^2 + bx + c = 0$  に対応させると、

$a = 2, b = 3, c = -4$

これを解の公式  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  に代入して

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

やってみよう!

2次方程式  $4x^2 - 5x - 3 = 0$  を解きなさい。

【答え】

$4x^2 - 5x - 3 = 0$  を  $ax^2 + bx + c = 0$  に対応させると、

$a = 4, b = -5, c = -3$

これを解の公式  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  に代入して

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 4 \times (-3)}}{2 \times 4} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{8}$$

例題

2次方程式  $(3x - 2)^2 = 4$  を解きなさい。

【解説】

「平方根」「因数分解」「解の公式」すべての方法で解くことができます。

〔1〕平方根

$$\begin{aligned} (3x - 2)^2 &= 4 \\ 3x - 2 &= \pm 2 \\ 3x &= \pm 2 + 2 \\ 3x &= 0, 4 \end{aligned}$$

よって、 $x = 0, \frac{4}{3}$

〔2〕因数分解

$$\begin{aligned} (3x - 2)^2 &= 4 \\ (3x - 2)^2 - 4 &= 0 \\ (3x)^2 - 2 \times 3 \times 2 + 2^2 - 4 &= 0 \\ 9x^2 - 12x &= 0 \\ 3x(3x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $3x = 0$  または  $3x - 4 = 0$

$3x = 0$  より  $x = 0$

$3x - 4 = 0$  より  $x = \frac{4}{3}$

したがって、 $x = 0, \frac{4}{3}$

〔3〕解の公式

$$\begin{aligned} (3x - 2)^2 &= 4 \\ \text{展開して整理すると} \\ 9x^2 - 12x &= 0 \end{aligned}$$

上の〔2〕  
を参照!

これを  $ax^2 + bx + c = 0$  に対応させると、  
 $a = 9, b = -12, c = 0$

これを解の公式  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  に代入して

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 9 \times 0}}{2 \times 9} = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{18} = \frac{12 \pm 12}{18} = \frac{2 \pm 2}{3}$$

よって、 $x = 0, \frac{4}{3}$

☆☆☆ (参考) 2次方程式の解の公式の証明 ☆☆☆

2次方程式の解の公式を導いてみましょう。

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の左辺を平方完成します。

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\end{aligned}$$

これが右辺の0と等しいので

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$x$  を求めたいので、 $x$  を含まない項を右辺に移項して、さらに通分すると

$$\begin{aligned}a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a} - c \\&= \frac{b^2 - 4ac}{4a}\end{aligned}$$

この両辺を  $a$  で割って通分すると

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

この平方根を考えて

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

したがって、

$$\begin{aligned}x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$



## おすすめ番組

☆「高校講座 ベーシック数学」  
第 17 回 2次方程式  
2次方程式の解の公式



CLICK!

☆「高校講座 ベーシック数学」  
第 18 回 文章題から 2 次方程式を作って解くこと  
2 次方程式の利用



CLICK!

Blank lined area for notes.