

2 次関数のグラフを応用する

講師
湯浅 弘一

1 2 次関数の決定

同一直線上にない 3 点を通る 2 次関数は 1 つに定まります。

例題

3 点 $(-1, -3)$ $(1, 1)$ $(2, 0)$ を通る 2 次関数の式を求めなさい。

【解説】

求める 2 次関数の式を $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とします。

これは、点 $(-1, -3)$ を通るので、代入すると

$$-3 = a - b + c \cdots \textcircled{1}$$

同様に $(1, 1)$ を通るので

$$1 = a + b + c \cdots \textcircled{2}$$

また $(2, 0)$ を通るので

$$0 = 4a + 2b + c \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ を計算すると、 $b = 2$

これを $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ にそれぞれ代入して式を整理すると

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = -4 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $a = -1$ 、 $c = 0$

よって、求める 2 次関数の式は

$$y = -x^2 + 2x$$

やってみよう!

3点 $(0, 0)$ $(-4, 0)$ $(1, -10)$ を通る 2 次関数の式を求めなさい。

【答え】

求める 2 次関数の式を $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおく。

点 $(0, 0)$ を通るので、上の式に代入すると

$$0 = c \cdots \textcircled{1}$$

同様に $(-4, 0)$ を通るので

$$0 = 16a - 4b + c \cdots \textcircled{2}$$

また $(1, -10)$ を通るので

$$-10 = a + b + c \cdots \textcircled{3}$$

①から $c = 0$ を②, ③にそれぞれ代入して式を整理すると

$$\begin{cases} 4a - b = 0 \\ a + b = -10 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $a = -2$, $b = -8$

よって、求める 2 次関数の式は

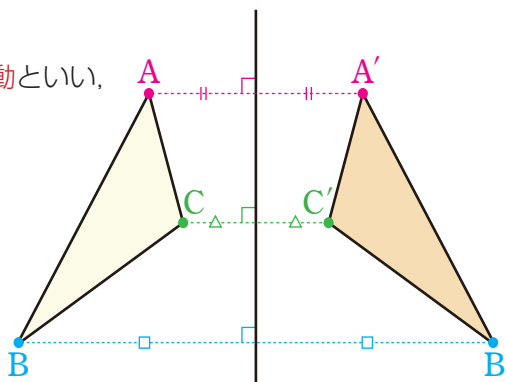
$$y = -2x^2 - 8x$$

2 対称移動

図形を、ある直線を折り目として折り返す移動を線対称移動といい、

このとき、その折り目の直線を対称の軸といいます。

右の図の場合、 $\triangle ABC$ を線対称に移動したものが $\triangle A'B'C'$ となります。



図形をある 1 点を中心に

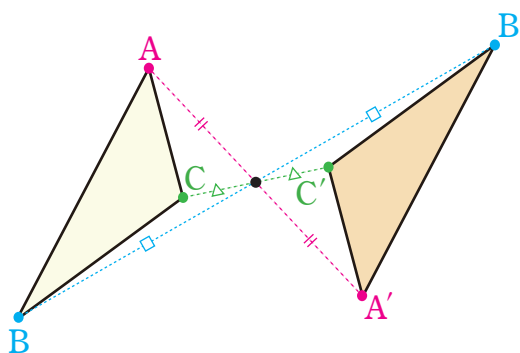
180 度回転した移動を点対称移動といい、

この点を回転の中心といいます。

点対称の図形をかくときは回転の中心を O として、

$$AO = OA', \quad BO = OB', \quad CO = OC'$$

となるようにかきます。



このページ掲載の文章・画像の無断転載及び商用利用を固く禁じます。

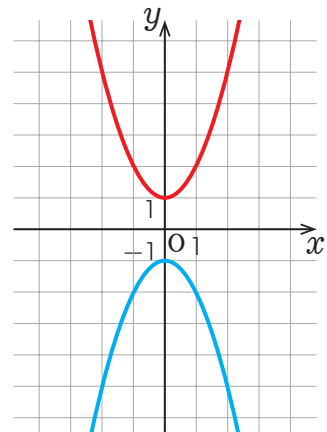
3 2次関数の対称移動

やってみよう!

$y = x^2 + 1$ を x 軸に関して対称移動して得られる放物線の式を求めなさい。

【解説】

放物線 $y = x^2 + 1$ の頂点は $(0, 1)$
 この点を x 軸に関して対称移動すると、点 $(0, -1)$
 さらに、形は下に凸から上に凸に変わるので
 2次関数の2次の係数の符号がマイナスに変わります。
 よって、求める放物線は $y = -x^2 - 1$

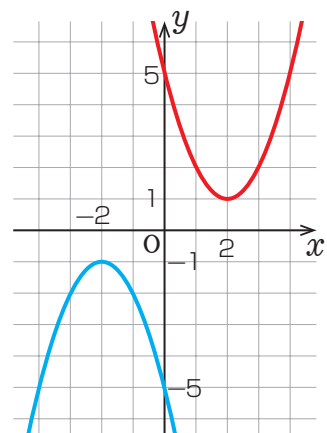


やってみよう!

$y = (x - 2)^2 + 1$ を原点 O に関して対称移動して得られる放物線の式を求めなさい。

【解説】

放物線 $y = (x - 2)^2 + 1$ の頂点は $(2, 1)$
 この点を原点 O に関して対称移動 (180°回転) すると、
 グラフの形は下に凸から上に凸に変わるので
 2次の係数の符号がマイナスに変わります。
 また、頂点は x 座標も y 座標も符号が変わるので $(-2, -1)$
 よって、求める放物線は $y = -(x + 2)^2 - 1$



4 2次関数の最大, 最小の応用

例題

2つの正方形があります。それぞれの1辺の長さを足すと10cmです。
この正方形2つの面積の和が最小になるとき、1つの正方形の1辺の長さは
何cmになるでしょう？

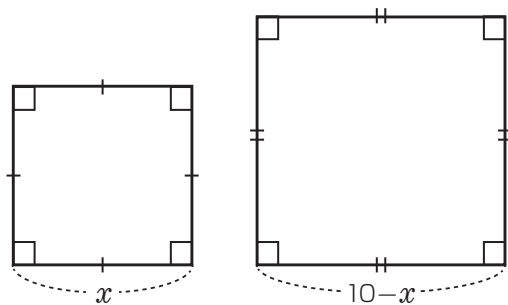
【解説】

右図のように

1つの正方形の1辺の長さを x cm とすると

一方の正方形の面積は x^2 cm²

もう一方の正方形の面積は $(10 - x)^2$ cm²



面積の和を y と置くと、

$$y = x^2 + (10 - x)^2$$

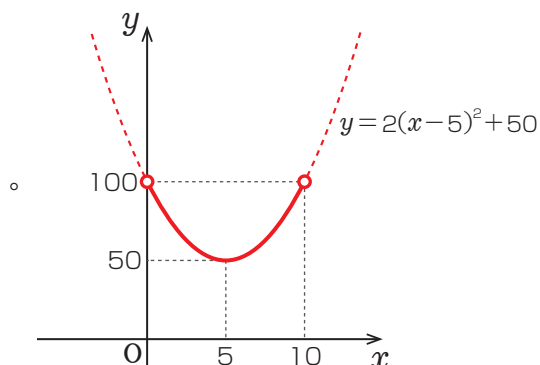
これを x の2次関数と考えて

$$y = x^2 + (10 - x)^2 \text{ の最小値を求めます。}$$

右辺を平方完成します。

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (10 - x)^2 \\ &= x^2 + 100 - 20x + x^2 \\ &= 2x^2 - 20x + 100 \\ &= 2(x - 5)^2 + 50 \end{aligned}$$

$0 < x < 10$ より



定義域が $0 < x < 10$ であることを注意!

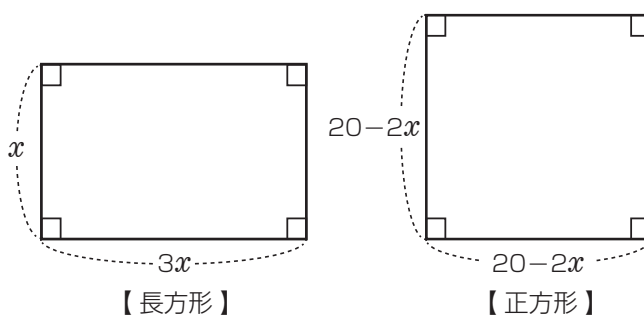
したがって、 $x = 5$ のとき最小値をとるので、2つの正方形の面積の和が最小になるのは、一方の正方形の1辺の長さが5cm のときです。

やってみよう!

長さ 80cm の針金があります。これを 2 本に切ってそれぞれを折り曲げて、1 つは正方形を作り、もう 1 つは長辺の長さが短辺の長さの 3 倍となる長方形を作ります。この正方形と長方形の周の和の長さを 80cm とするとき、それぞれの面積の和を S として、 S を最小にする長方形の針金の短辺の長さを求めなさい。

【答え】

長方形の短辺の長さを x cm とすると
 長辺の長さは $3x$ cm と定まるので、
 長方形のまわりの長さは $8x$ cm。
 このとき、
 残りの針金の長さは $(80 - 8x)$ cm
 この長さについては
 $80 - 8x > 0$ より $0 < x < 10$



この範囲で残りの針金からできる正方形の 1 辺の長さは

$$\frac{1}{4}(80 - 8x) = 20 - 2x \text{ (cm)}$$

と求められるので、正方形と長方形の面積の和 S は

$$\begin{aligned} S &= (20 - 2x)^2 + 3x \times x \\ &= 400 - 80x + 4x^2 + 3x^2 \\ &= 7x^2 - 80x + 400 \\ &= 7\left(x^2 - \frac{80}{7}x\right) + 400 \\ &= 7\left\{\left(x - \frac{40}{7}\right)^2 - \frac{1600}{49}\right\} + 400 \\ &= 7\left(x - \frac{40}{7}\right)^2 - 7 \times \frac{1600}{49} + 400 \\ &= 7\left(x - \frac{40}{7}\right)^2 - \frac{1600}{7} + 400 \\ &= 7\left(x - \frac{40}{7}\right)^2 + \frac{1200}{7} \end{aligned}$$

よって、 S は $x = \frac{40}{7}$ のとき最小になることがわかるので、

S を最小にする長方形の針金の短辺の長さは、 $\frac{40}{7}$ cm