

2次関数の最大値・最小値

講師
湯浅 弘一

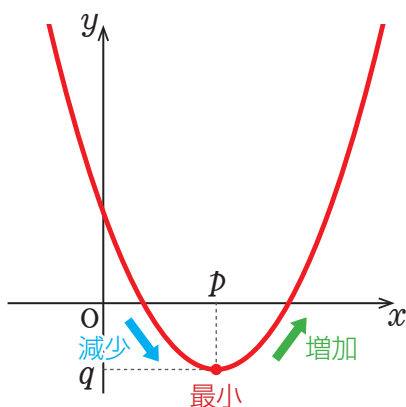
1 2次関数の最大値・最小値

2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ は

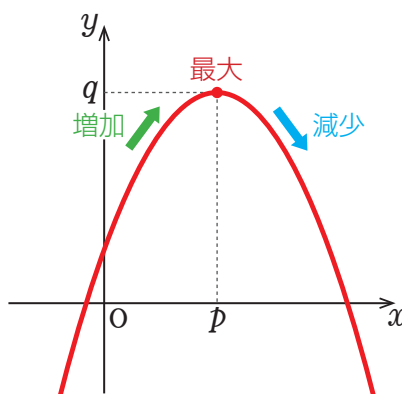
$a > 0$ のとき、 $x = p$ で最小値 q をとり、最大値はない。

$a < 0$ のとき、 $x = p$ で最大値 q をとり、最小値はない。

$a > 0$



$a < 0$



例題

$y = (x - 2)^2 + 1$ の最大値，最小値を求めなさい。

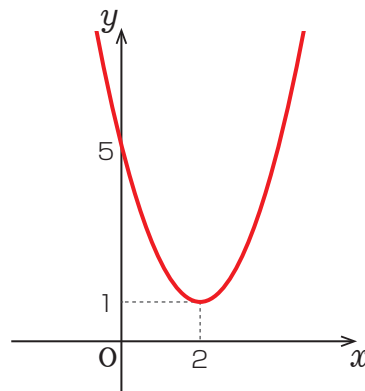
【解説】

この関数のグラフの頂点の座標は $(2, 1)$

y の値が一番小さいところが最小値なので、

最大値はなし

最小値は $x = 2$ のとき 1

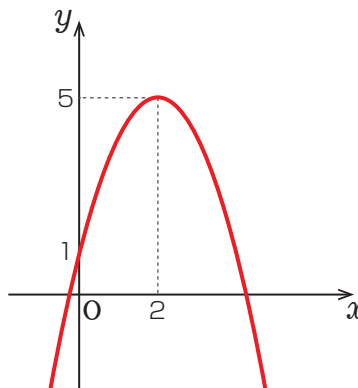


練習問題 1

$y = -(x - 2)^2 + 5$ の最大値, 最小値を求めなさい。

【答え】

この関数のグラフの頂点の座標は $(2, 5)$
 y の値が一番大きいところが最大値なので,
 最大値は $x = 2$ のとき 5
 最小値はなし



やってみよう!

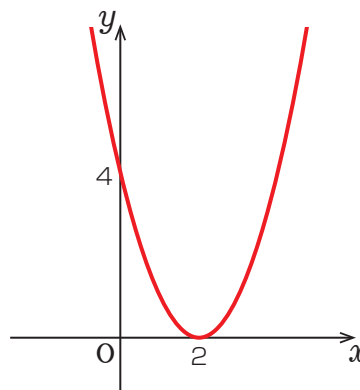
$y = x^2 - 4x + 4$ の最大値, 最小値を求めなさい。

【答え】

まず, グラフをかくために平方完成をします。

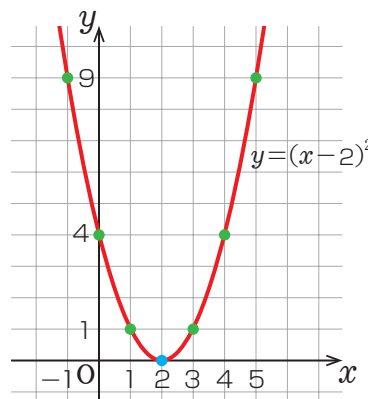
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x - 2)^2 - 2^2 + 4 \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

この関数のグラフの頂点の座標は $(2, 0)$ と求まります。
 よって,
 最大値はなし, 最小値は $x = 2$ のとき 0



☆☆☆ グラフの曲線は正確にかきましよう ☆☆☆

- ① 頂点の座標に点を打つ
- ② 頂点の左右に1ずつ、座標を求めて点を打つ
- ③ 点をつなげて線をひく



2 定義域と値域

y が x の関数で表されているとき

つまり $y = (x \text{ の式})$ でかかっているとき、変数 x のとりうる値の範囲を**定義域**といい、

x が定義域全体を動くとき、 y がとる値の範囲を、この関数の**値域**といいます。

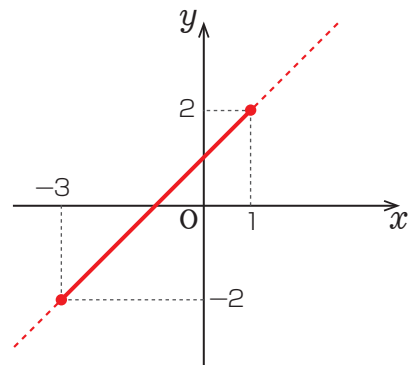
例えば、 $y = x + 1$

この関数の定義域が $-3 \leq x \leq 1$ のとき、

グラフは右図のようになります。

この関数の値域、つまり y の値の範囲は $-2 \leq y \leq 2$

となります。



やってみよう!

$y = -x + 2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$

のグラフを書き、この関数の最大値と最小値を求めなさい。

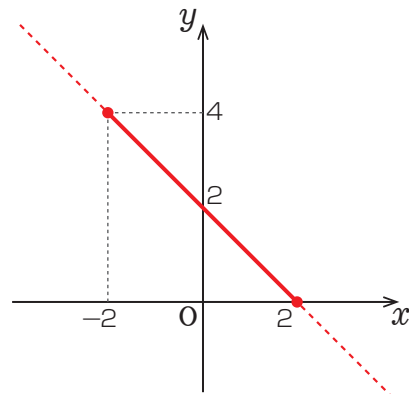
【解説】

右図のグラフから $-2 \leq x \leq 2$ の範囲で

y の値の範囲は $0 \leq y \leq 4$ とわかるので、

$x = -2$ のとき最大値 4

$x = 2$ のとき最小値 0



3 定義域のある2次関数の最大値・最小値

例題

$y = 2(x - 1)^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最大値, 最小値を求めなさい。

【解説】

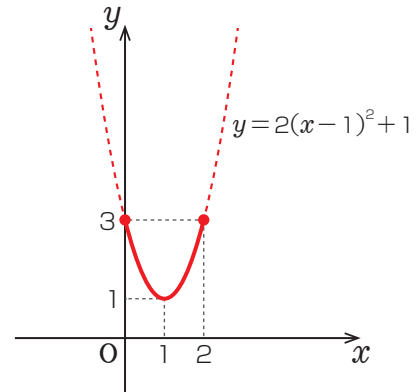
頂点が $(1, 1)$ の下に凸のグラフになります。

ここで定義域 $0 \leq x \leq 2$ に注意すると,

最大値は $x = 0, 2$ のとき 3

最小値は $x = 1$ のとき 1

とわかります。



練習問題2

$y = -(x - 2)^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 3$) のグラフをかきなさい。

【答え】

