第13回

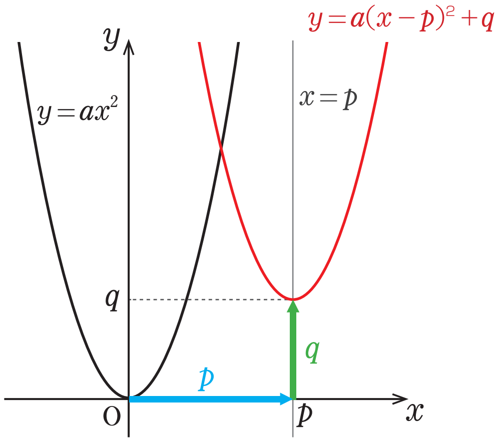
2次関数のグラフをかく

講師
湯浅 弘一

1 平方完成で2次関数のグラフをかく

前回の復習から･･･

$y = a(x - p)^2 + q$ の頂点の座標は (p, q) です。



この式 $y = a(x - p)^2 + q$ を標準形といいます。

そして，

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を

標準形 $y = a(x - p)^2 + q$ の形にすることを

平方完成といいました。

例題

$y = x^2 - 6x + 11$ のグラフをかきなさい。

【解説】

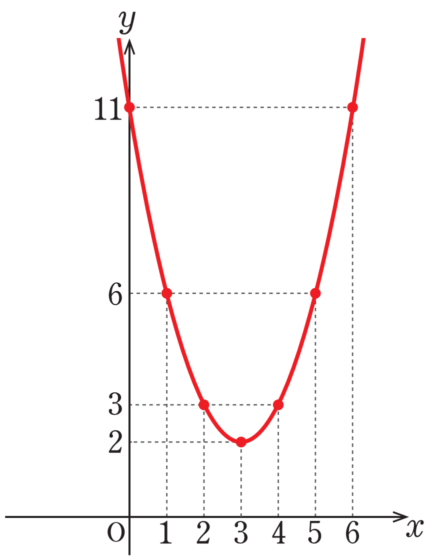
平方完成をして頂点の座標を求めましょう。

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 6x + 11 \\
&= x^2 - 2 \times 3x + 11 \\
&= (x - 3)^2 - 9 + 11 \\
&= (x - 3)^2 + 2
\end{aligned}
$$

頂点は (3，2) です。

グラフの形は，2次の係数が1なので，

$y = x^2$ と同じ開き具合になります。



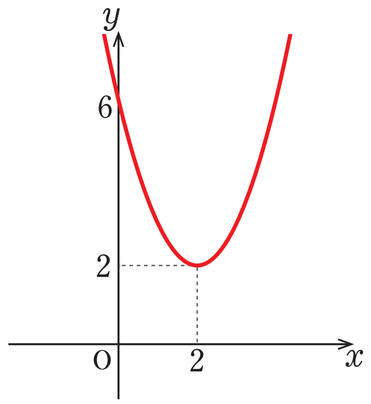
やってみよう！

（1）$y = x^2 - 4x + 6$ のグラフをかきなさい
（2）$y = 2x^2 - 4x + 5$ のグラフをかきなさい

【解 説】

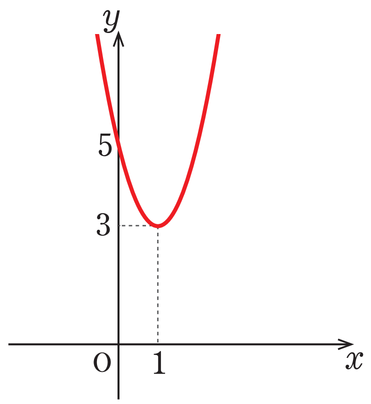
（1）$y = x^2 - 4x + 6$
$= (x - 2)^2 + 2$

頂点は $(2,\ 2)$ です。



（2）$y = 2x^2 - 4x + 5$
$= 2(x^2 - 2x) + 5$
$= 2\{(x - 1)^2 - 1\} + 5$
$= 2(x - 1)^2 - 2 + 5$
$= 2(x - 1)^2 + 3$

頂点は $(1,\ 3)$ です。
グラフは $y = 2x^2$ と同じ開き具合ですから，
図のようになります。

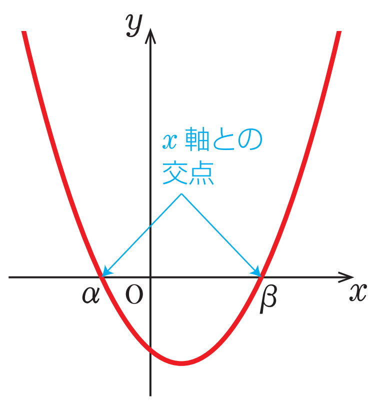


2 因数分解でグラフをかく

２次関数のなかには右辺を因数分解できるものがあります。

$y = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (a > 0)$

のグラフの形は右図のようになります。
つまり，
$a > 0$ のとき２次関数 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ と
y 軸との共有点は $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ です。



例題

$y = x^2 + 4x - 12$ のグラフをかきなさい。

【解 説】

$y = x^2 + 4x - 12$ の右辺を因数分解すると

$y = (x + 6)(x - 2)$ ですから，x 軸との共有点は$(-6,\ 0)$，$(2,\ 0)$ です。

2次関数のグラフは軸に対して対称なので，

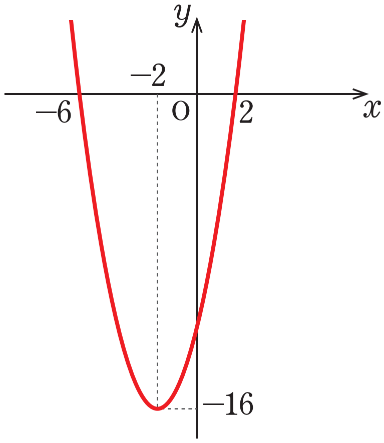
頂点の x 座標は，-6 と 2 の真ん中で -2 になります。

頂点の y 座標は，$y = (x + 6)(x - 2)$ に $x = -2$ を代入して

$y = (-2 + 6)(-2 - 2) = -16$

つまり，頂点の座標は $(-2,\ -16)$ と求まります。

グラフの形は $y = x^2$ と同じなので，図のようになります。



やってみよう！

$y = x^2 - 2x - 3$ のグラフをかきなさい。

【答 え】

$y = x^2 - 2x - 3$ の右辺を因数分解すると

$y = (x + 1)(x - 3)$ ですから，x 軸との共有点は$(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ です。

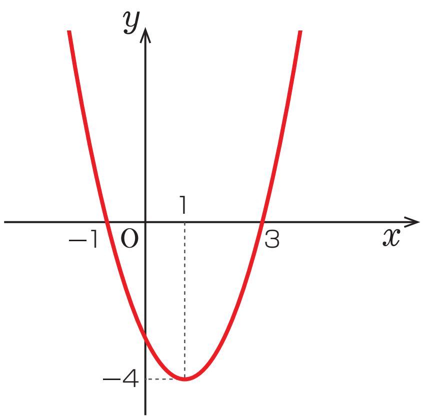
このとき，2次関数は軸に対称ですから頂点の x 座標は -1 と 3 の真ん中である 1 です。

頂点の y 座標は，$y = (x + 1)(x - 3)$ に $x = 1$ を代入して

$y = (1 + 1)(1 - 3) = -4$

頂点の座標は $(1,\ -4)$ と求まります。

グラフの形は $y = x^2$ と同じなので，図のようになります。



3　2次関数のグラフの平行移動

2次関数の平行移動を考えます。

例 題

放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ を x 軸方向に2，y 軸方向に－3平行移動した式を求めさない。

【解 説】

放物線の頂点を求めて頂点だけ先に移動して考えます。

$y = x^2 - 2x + 3$ を平方完成すると

$y = (x - 1)^2 + 2$ と変形できるので，この放物線の頂点は(1，2)

これを x 軸方向に2，y 軸方向に(－3)平行移動すると，(1＋2， 2－3)＝(3，－1)

頂点 (3， －1)を，標準形 $y = a(x-p)^2+q$ にあてはめると，

$y = (x - 3)^2 - 1$

展開して，

$y = x^2 - 6x + 8$

Point　2次関数を平行移動してもグラフの形は変わりません。
つまり，x の2次の係数も変わりません。

やってみよう！

放物線 $y = x^2 + 2x + 2$ を x 軸方向に3，y 軸方向に－4平行移動した式を求めさない。

【答 え】

$y = x^2 + 2x + 2$ を平方完成すると

$y = (x + 1)^2 + 1$

よって，頂点の座標は(－1，1)

これを x 軸方向に3，y 軸方向に(－4)平行移動すると，(1＋2， 2－3)＝(3，－1)

頂点の座標は(－1＋3， 1－4)＝(2，－3)

これを，標準形 $y = a(x-p)^2+q$ にあてはめると，

$y = (x - 2)^2 - 3$

展開して，

$y = x^2 - 4x + 1$