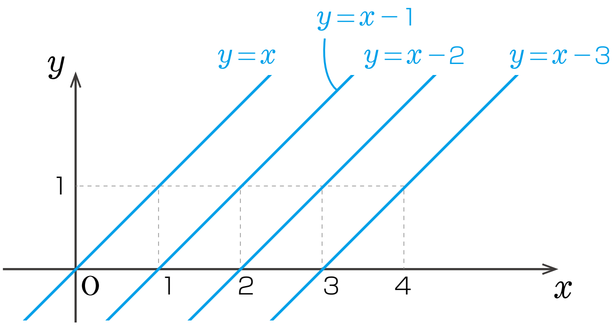
２次関数の頂点

講師
湯浅 弘一

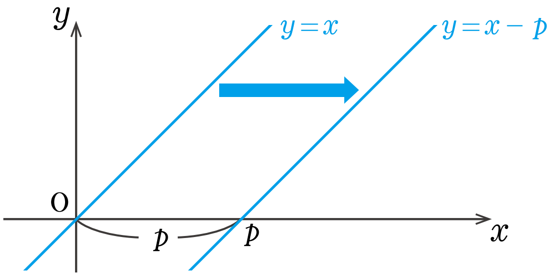
1 １次関数の平行移動の公式

右の図を参照してください。
$y = x$ のグラフを
右に (x 軸方向に)1 ずつ移動すると
$y = x - 1$
$y = x - 2$
$y = x - 3$
となります。

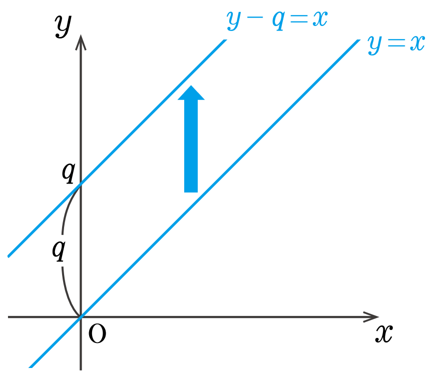


これは，右に (x 軸方向に)1 ずつ移動するたびに，
x が $x - 1$，$x - 2$，$x - 3$ に変わっていっているということです。

一般に…
$y = x$ のグラフを右に (x 軸方向に) p 移動すると
x が $x - p$ に変わり $y = x - p$ になります。
これは，$y = x$ に限らず成り立ちます。
つまり，いろいろなグラフを
右に (x 軸方向に) p 移動するときは，
x ⇨ $x - p$ に変更するだけで
式をつくることができます。



同じようにして…
$y = x$ のグラフを上に (y 軸方向に) q 移動すると
y が $y - q$ に変わり $y - q = x$，
つまり，$y = x + q$ になります。
これは，$y = x$ に限らず成り立ち，
いろいろなグラフを
上に (y 軸方向に) q 移動するときは，
y ⇨ $y - q$ に変更するだけで
式をつくることができます。



☆★☆ 1次関数の平行移動の公式 ☆★☆

1次関数 $y = ax + b$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q，それぞれ平行移動した式は，
x に（$x - p$）を，y に（$y - q$）を代入して，

$$y - q = a(x - p) + b$$

となります。

やってみよう！

$y = x + 2$ を，x 軸方向に＋1，y 軸方向に＋2，平行移動した式を求めなさい。

【解 説】

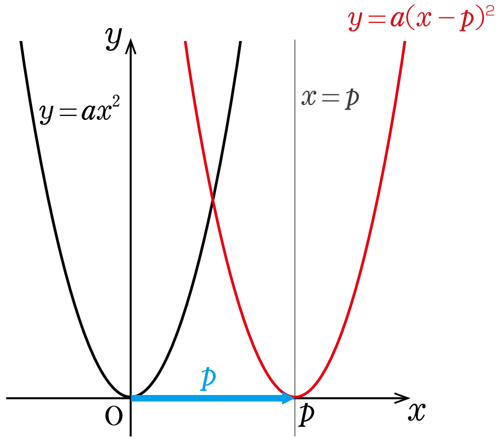
x 軸方向に＋1 平行移動するので x ⇨ $x - 1$ に代え（代入し），
y 軸方向に＋2 平行移動するので y ⇨ $y - 2$ に代え（代入し）ます。

つまり，$\boxed{y} = \boxed{x} + 2$

$$y - 2 = (x - 1) + 2$$

これを計算して，$y = x + 3$ となります。

2　2次関数の平行移動



2次関数の平行移動も，考え方は1次関数と同じです。

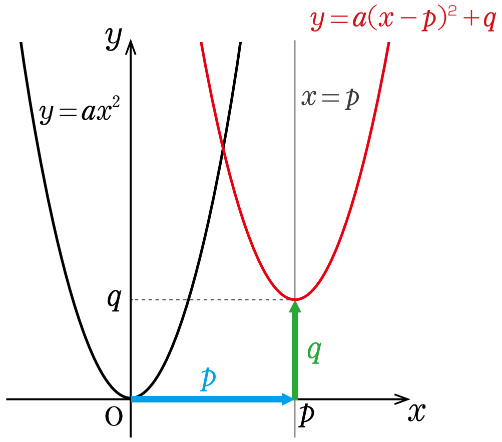
$y=ax^2$ $(a>0)$

を x 軸方向に p 平行移動するとき，

x の代わりに $x-p$ を代入して

$y=a(x-p)^2$

と求めることができます。



これを，さらに y 軸方向に q 平行移動するとき，

y の代わりに $y-q$ を代入するので

$y-q=a(x-p)^2$

つまり

$y=a(x-p)^2+q$

となります。

ここで頂点について考えると，

$y=ax^2$ $(a>0)$ の頂点は原点 $(0,\ 0)$ です。

この点を実際に x 軸方向に p 平行移動し，さらに y 軸方向に q 平行移動すると頂点は $(p,\ q)$ です。

つまり $y=a(x-p)^2+q$ の頂点の座標は $(p,\ q)$ です。

やってみよう！

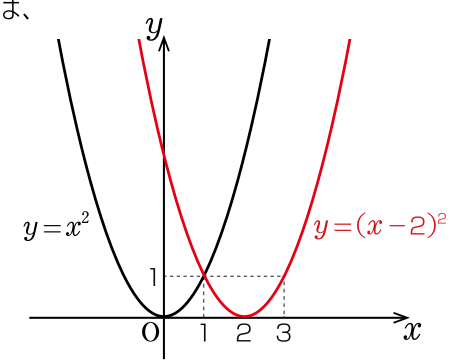
$y=x^2$ を x 軸方向に $+2$ 平行移動した式を求めなさい。

【解 説】

関数の平行移動の公式を用いて x 軸方向に $+2$ 平行移動した式は、

x の代わりに $x-2$ を代入したものですから、

$y=(x-2)^2$ と求められます。



ちなみに，$y=x^2$ の頂点は原点 $(0,\ 0)$ です。

x 軸方向に $+2$ 平行移動した $y=(x-2)^2$ の頂点は，

原点 $(0,\ 0)$ を x 軸方向に $+2$ 平行移動した $(2,\ 0)$ です。

3 平方完成とは

2次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを平方完成といいます。
この変形によって，2次関数の頂点の座標を求めることができます。

例 題

$y=x^2-6x+11$ の頂点の座標を求めなさい。

【解 説】

平方完成は，まず「2乗の形をつくる」，そして「余分な数を引く」のがポイントです。

「2乗の形をつくる」からやってみましょう。
平方完成の式の「$a(x-p)^2+q$」の赤字の部分に注目してください。
乗法公式の平方タイプ（マイナスバージョン）に似ていませんか？

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

a の代わりに x を代入。b の代わりに p を代入すると，

$$(x-p)^2=x^2-2xp+p^2$$

さらに，赤文字の部分の p と x を入れ替えると，

$$(x-p)^2=x^2-2px+p^2$$

この $-2px$ がポイントです。
x の係数が $-2p$ ですから，2で割ると $-p$ です。
これで「2乗の形をつくる」ことができます。

問題の式 $y=x^2-6x+11$ で考えてみましょう。
x の2次の項と1次の項に着目します。

$$\begin{aligned} y &= x^2-6x+11 \\ &= x^2-2\times 3x+11 \end{aligned}$$

$(x-3)^2=x^2-6x+9$ なので，赤文字の部分は，$(x-3)^2$ から余分な9を引いたもの，
つまり $(x-3)^2-9$ になります。
これが、平方完成のもう一つのポイント「余分な数を引く」です。

$$\begin{aligned} y &= (x-3)^2-9+11 \\ &= (x-3)^2+2 \end{aligned}$$

平方完成ができました。
p が3，q が2なので，頂点の座標は(3，2)と求まります。

やってみよう！

$y=x^2-2x+2$ の頂点の座標を求めなさい。

【答え】

x の2次の項と1次の項に着目して平方完成します。

$$
\begin{aligned}
y &= x^2-2x+2\\
&= x^2-2\times 1x+2\\
&= (x-1)^2-1^2+2\\
&= (x-1)^2+1
\end{aligned}
$$

平方完成

よって，頂点の座標は $(1,\ 1)$ となります。

やってみよう！

$y=2x^2-4x+11$ の頂点の座標を求めなさい。

【答え】

x の2次の係数が1以外の場合，その係数で x の2次の項と1次の項をくくります。

$y=2x^2-4x+11$ の x の2次の係数2で，x の2次の項と1次の項をくくりましょう。

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2-4x+11\\
&= 2(x^2-2x)+11\\
&= 2(x^2-2\times 1x)+11\\
&= 2\{(x-1)^2-1^2\}+11\\
&= 2(x-1)^2-2+11\\
&= 2(x-1)^2+9
\end{aligned}
$$

カッコの中を平方完成

中カッコの係数2を分配

よって，頂点の座標は $(1,\ 9)$ となります。

やってみよう！

$y=-x^2-4x+11$ の頂点の座標を求めなさい。

【答 え】

$y=-x^2-4x+11$ の x の2次の係数 (-1) で，x の2次の項と1次の項をくくりましょう。

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2-4x+11 \\
&= -1(x^2+4x)+11 \\
&= -1(x^2+2\times 2x)+11 \\
&= -1\{(x+2)^2-2^2\}+11 \\
&= -(x+2)^2+4+11 \\
&= -(x+2)^2+15
\end{aligned}
$$

カッコの中を平方完成

中カッコの係数 (-1) を分配

係数「−1」の「1」は省略できるんでしたね！

よって，頂点の座標は $(-2,\ 15)$ となります。

おすすめ番組

☆「高校講座　ベーシック数学」
第22回 文章題から2次方程式を作って解くこと
グラフの平行移動

CLICK!

☆「高校講座　ベーシック数学」
第23回 三角比の導入
原点以外に頂点をもつ2次関数

CLICK!