数学Ⅰ

第34回　第４章　集合と論証

命題と集合(2)

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

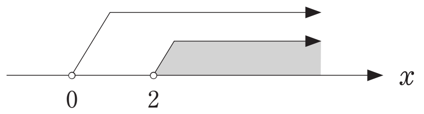
今回の学習では「A ならば B」という命題が正しいことを証明することが目標です。証明というと三角形の合同のような証明が頭に浮かぶかもしれませんが、違う形の証明もあります。いろいろな証明のしかたを学びましょう。

学習のポイント

①命題の逆
②命題の対偶
③背理法

ポイント1　命題の逆

命題「$p \Rightarrow q$」に対して「$q \Rightarrow p$」をもとの命題の $\boxed{\text{逆}}$ または $\boxed{\text{逆命題}}$ といいます。
例えば、命題 A「$x > 2 \Rightarrow x > 0$」は以下の数直線を見ると



$x > 2$ なら必ず $x > 0$ になるので、この命題 A は真です。
この逆を考えると、命題 A の逆は、「$x > 0 \Rightarrow x > 2$」
この命題 A の逆は偽です。
$x > 0$ を満たすものとしては、例えば $x = 1$ があります。しかし、この $x = 1$ は、$x > 2$ を満たしません。この命題 A の逆を満たさない $x = 1$ を $\boxed{\text{反例}}$ といいます。

ポイント2　命題の対偶

命題「$p \Rightarrow q$」に対して、「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」をもとの命題の $\boxed{\text{対偶}}$ または $\boxed{\text{対偶命題}}$ といいます。

■対偶の性質

ある命題 A「$p \Rightarrow q$」が真であるとき、命題 A の対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も真となり
ある命題 A「$p \Rightarrow q$」が偽であるとき、命題 A の対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も偽となります。
つまり、<u>もとの命題と対偶命題の真偽は、一致します</u>。

例えば、命題 A「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」は真です。
この対偶「$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$」も確かに真です。

■“または”と“かつ”の確認！

第 32 回の「集合」で学習しましたが、もう一度確認しておきましょう。

Q：「AさんもBさんも男」を否定せよ。

A：

$$\begin{array}{l} \quad\text{A}\qquad\text{B}\\ (\text{男}\ \cdot\ \text{男})\\ \left.\begin{array}{l}(\text{男}\ \cdot\ \text{女})\\(\text{女}\ \cdot\ \text{男})\\(\text{女}\ \cdot\ \text{女})\end{array}\right\}\ \text{否定はこの3つ}\end{array}$$

よって「A さんまたは B さんは女」
もしくは「A さん、B さんの少なくとも一方が女」となります。

ここで、「A さんも B さんも…」は、「A さんかつ B さん」の意味です。
「A かつ B」の否定は「 $\overline{\text{A}}$ または $\overline{\text{B}}$」であり、「A または B」の否定は「$\overline{\text{A}}$ かつ $\overline{\text{B}}$」です。

問題

「整数 a, b について積 ab が 4 の倍数ならば、a は 2 の倍数または b は 2 の倍数」であることを示せ。

示すべきは！

「積 ab が 4 の倍数　⇒　a は 2 の倍数または b は 2 の倍数」

この対偶、

「aが2の倍数でないかつbも2の倍数でない　⇒　積abは4の倍数でない」を示そう！

解

aが2の倍数かでないつbも2の倍数でないとき、$a=2k+1$、$b=2l+1$と書けます（k, lは、整数）。このとき、$ab=(2k+1)(2l+1)=4kl+2k+2l+1$となり、これは奇数なので4の倍数ではありません。よって、対偶が真であることが示されたのでもとの命題も真であることが示されました。

ポイント3　背理法

背理法とは、ある命題を証明するとき、その命題の否定を仮定して話を進めると、つじつまが合わなくなること、つまり、矛盾することを示し、それによって、もとの命題が成り立つと結論する論法のことです。これは $A \to B$ を証明するのに、B を否定してから証明する方法、つまり $\overline{B} \to \overline{A}$（対偶命題）を使っています。

例 題　$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

解答例

$\sqrt{2}$ が、有理数であるとすると、$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ と書ける。（p, q は、互いに素※な自然数、$q \neq 1$）

$\sqrt{2}\,q=p$ の両辺を 2 乗して、$2q^2=p^2$ より、<u>p は 2 の倍数</u>①となるから $p=2k$(k は自然数）とおくと、$2q^2=p^2$ は、$2q^2=(2k)^2$、つまり $q^2=2k^2$、<u>q も 2 の倍数</u>②。

①②は、「p, q は互いに素な自然数」に矛盾するので $\sqrt{2}$ は無理数。

※ 互いに素：共通の約数がない