

三角比と図形の計量

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

三角比もいよいよ最終回です。今まで学習してきた公式や定理を総動員して空間図形にも使ってみましょう。

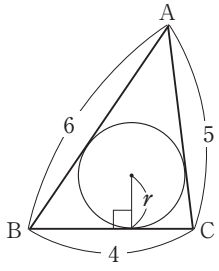
学習のポイント

- ① 三角形の面積、正弦定理、余弦定理をまとめて使う
- ② 鈍角の三角形に三角比を使う
- ③ 空間図形と三角比

ポイント1 三角形の面積、正弦定理、余弦定理をまとめて使う

さあ、今までの公式を確認しながら問題を解いてみましょう。

Q



左の△ABCの内接円の半径 r の長さを求めなさい。

A : 難しい!

ですよねえ～。これを解くには、△ABCの面積を求める必要があります。

では、△ABCの面積は？ $S = \frac{1}{2} bc \times \sin A$

$b = AC = 5$, $c = AB = 6$ ですから $\sin A$ がほしい。

でも、 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さがわかるときは、余弦定理が使えますから、

cosA が求められる。ということは、 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ を使えば $\sin A$ が求められます。

というわけで、

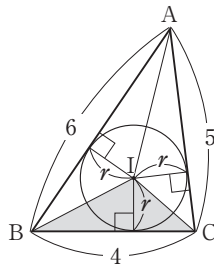
作業は、

①余弦定理から $\cos A$ を求める	です。
② $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ から $\sin A$ を求める	
③ $\sin A$ から $\triangle ABC$ の面積を求める	
④ 内接円の半径を求める	

この論理思考が大事なのです!!

でもどうして三角形の面積から内接円の半径が求められるのか?

これは次の図を使います。

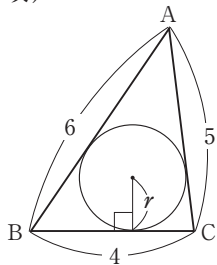


$\triangle ABC$ の内心を I とすると $\triangle IBC$ の $BC = 4$ を底辺とすると高さは、内接円の半径 r になります。

すると、 $\triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB = \triangle ABC$ を使うと r を求められます。

そこで問題を書き換えてみます。

Q (改)



左の $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とするとき、次の値を求めなさい。

- (1) $\cos A$
- (2) $\sin A$
- (3) $\triangle ABC$ の面積
- (4) r

A

(1) $\triangle ABC$ に余弦定理から、 $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos A$

$$60\cos A = 25 + 36 - 16$$

$$= 45$$

$$\cos A = \frac{3}{4}$$

【答え】

$$\begin{aligned} (1) \quad \angle ADB &= 180^\circ - (\angle DAB + \angle DBA) \\ &= 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

(2) $\triangle ADB$ に正弦定理から

$$\frac{AD}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sin 45^\circ}$$

$\uparrow \angle DBA$ $\uparrow \angle ADB$

$$\begin{aligned} AD &= \frac{10}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{10}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{6} \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{CD}{AD} = \tan 60^\circ \text{ より}$$

$$\begin{aligned} CD &= AD \times \tan 60^\circ \\ &= 5\sqrt{6} \times \sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{2} \text{ (m)} \end{aligned}$$