数学Ⅰ

第30回　第３章　三角比

三角比と座標

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

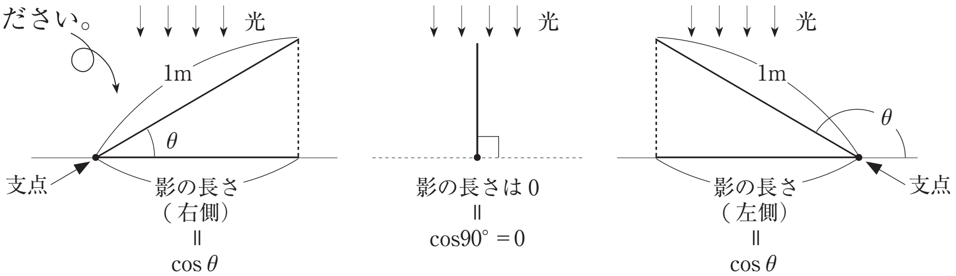
三角比を今までは、0° から 90° の角度で考えてきました。今回は 90° を超えた角度を含めて考えます。ここを乗り越えれば三角比も終わりに近づきます。

学習のポイント

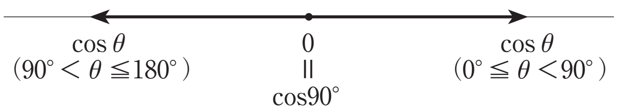
① **座標の中に三角比をあてはめる**
② **鈍角の三角比**
③ **鈍角の三角比を使う**

ポイント1　座標の中に三角比をあてはめる

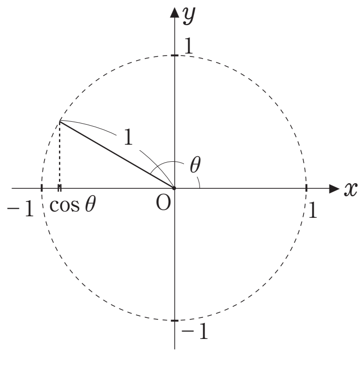
1m の棒に上から光を当てたとき影の長さを cos θ と言いました。
思い出してください。



ということは、

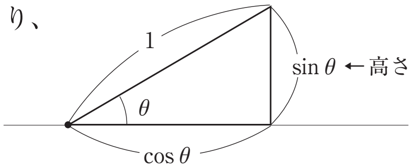


つまり、$0° \leqq \theta < 90°$ のときは、cos $\theta > 0$
$90° < \theta \leqq 180°$ のときは、cos $\theta < 0$
また、cos90° ＝ 0
これを半径 1 の円で考えると、右図のようになります。

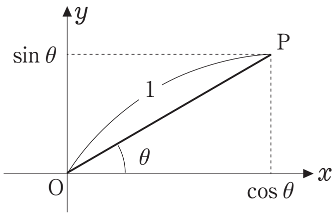


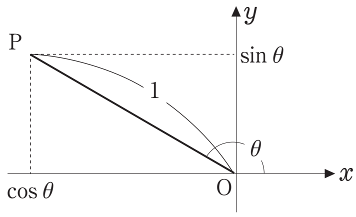
同じように、高さを $\sin\theta$ と考えます。

つまり、

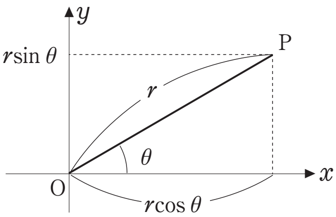


これを拡張すると座標を用いて、OP ＝ 1 のとき　P ($\cos\theta$, $\sin\theta$) と表せます。





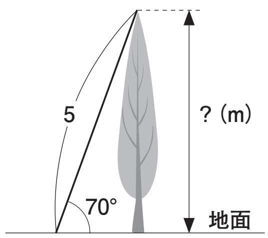
この OP ＝ r ならば、P ($r\cos\theta$, $r\sin\theta$) と表せます。



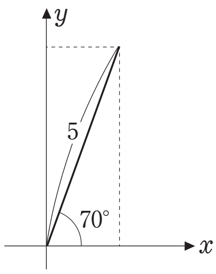
■座標で考えてみよう

Q： 5mのロープを木のてっぺんから地面に投げたところ、地面とロープとのなす角が下図のように70° になりました。この木の高さを求めなさい。

（※三角比の表を使います。第25回、101ページ）



A： これを座標で考えてみましょう。



木の高さ　$y = 5\sin 70^\circ$

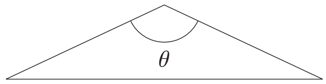
$\sin 70^\circ = 0.9397$ より

$y = 5 \times 0.9397$

$= \underline{4.6985\ (\mathrm{m})}$

ポイント2　鈍角の三角比

鈍角とは、90° を超え 180° 未満の角度を言います。よく鈍角三角形という言葉を耳にします。



この角度は、$90^\circ < \theta < 180^\circ$ です。

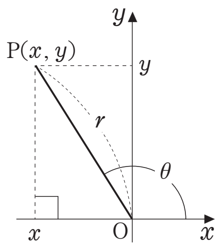
このとき、鈍角 θ の三角比を次のように定めます。

鈍角の三角比

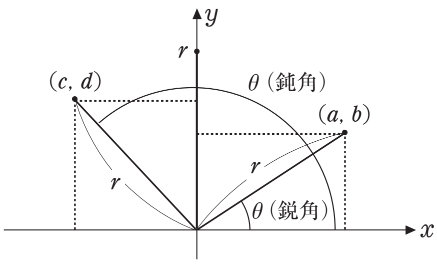
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



数学 I では、$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ を扱いますので下図の場合、次の（1）～（3）のようになります。



（1）θ が鋭角のときは、$(a,\ b)$ を使って、　$\sin\theta = \dfrac{b}{r} > 0$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} > 0$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} > 0$$

(2)　$\theta = 90°$ のときは、$(0,\ r)$ を使って、　$\sin\theta = \dfrac{r}{r} = 1$

$\cos\theta = \dfrac{0}{r} = 0$

$\tan\theta = \dfrac{r}{0}$ ……分母が 0 なので値なし。

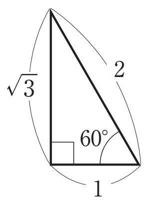
(3)　θ が鈍角のときは $(c,\ d)$ を使って、　$\sin\theta = \dfrac{d}{r} > 0$

$\cos\theta = \dfrac{c}{r} < 0$

$\tan\theta = \dfrac{d}{c} < 0$

ここに注意！

確認



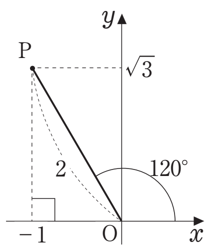
を使うと…

下図のように $\theta = 120°$，OP $= 2$ とすると、
点Pの座標は$(-1,\ \sqrt{3})$となるから、$r=2,\ x=-1,\ y=\sqrt{3}$となります。
よって、

$$\sin 120° = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



ポイント3　鈍角の三角比を使う

実際に問題を解いていきましょう。

問題 1　θ が鈍角のとき $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ならば、$\cos\theta = ?$

答え

三角比の相互関係より、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ なので、

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

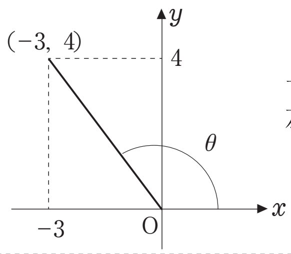
$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

よって、　$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$

しかし、θ が鈍角なので $\cos\theta < 0$ より

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

注



上の問題の θ は左図になります。

問題 2　$0 < \theta < 180^\circ$ のとき、$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ ならば、$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

答え

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると、$\sin^2\theta + 2\sin\theta \times \cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

三角比の相互関係より、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　なので、

$$1 + 2\sin\theta \times \cos\theta = \frac{1}{4}$$

式を整理して、$\sin\theta \times \cos\theta = \dfrac{-3}{8} < 0$ より　θ は鈍角とわかる。

ここで、$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x$ を表すと $\begin{cases} y + x = \dfrac{1}{2} \\ yx = \dfrac{-3}{8} \end{cases}$

y を消去して、$\left(\dfrac{1}{2} - x\right)x = \dfrac{-3}{8}$

つまり、$8x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times 8\times(-3)}}{2\times 8}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$$

$x = \cos\theta < 0$　（θ は鈍角）より、

$$\cos\theta = \frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} - \frac{1-\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{7}}{4}$$

三角比の相互関係より、$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{7})}{\frac{1}{4}(1-\sqrt{7})}$

$$= \frac{(1+\sqrt{7})^2}{(1-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})}$$

$$= \frac{8+2\sqrt{7}}{-6}$$

$$= -\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

まとめ

いろいろな角の三角比を表にまとめると次のようになります。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0