

余弦定理

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

余弦とは、コサインのことでしたね。つまり、 $\triangle ABC$ において、 $\cos A$ 、 $\cos B$ 、 $\cos C$ を使う定理です。

学習のポイント

- ① 余弦定理とは
- ② 余弦定理の使い方
- ③ 正弦定理と余弦定理を使い分ける

ポイント1 余弦定理とは

まずは定理から、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

よく見ると、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

↑ 三平方の定理があります!!

さらによく見ると、

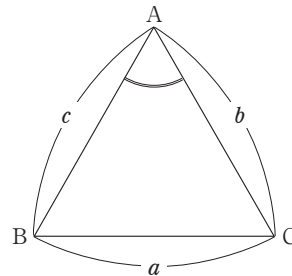
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

↑ 2 辺をはさむ角のコサインになっています。

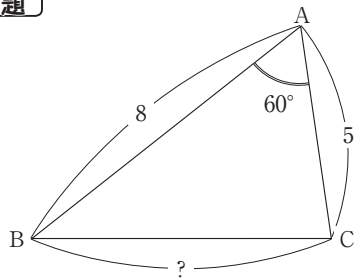
この定理は…

2 辺の長さとそのはさむ角の大きさがわかるとき

に使うことができます。



例題



左の△ABCの $AB = 8$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60^\circ$ であるとき BC の長さは？

$AB=8, AC=5, \angle BAC=60^\circ$



2 辺の長さとそのはさむ角がわかっている！

△ABC において余弦定理から、

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos 60^\circ$$


$$= 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}$$

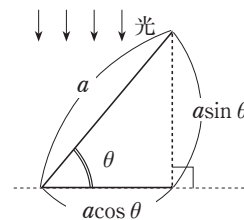
$$= 25 + 64 - 40$$

$$= 49$$

$$BC = \pm 7 \quad BC > 0 \text{ なので}$$

$$\underline{BC = 7}$$

 少し難しいですが、余弦定理を証明してみましょう！
そこで思い出してほしいのが…



です。

では、早速…

△ABC において C から AB への垂線の足を H とすると

$$AH = b \cos A$$

$$CH = b \sin A \text{ です。}$$

△CBH に三平方の定理を用いて、

$$CB^2 = CH^2 + HB^2 \text{ より}$$

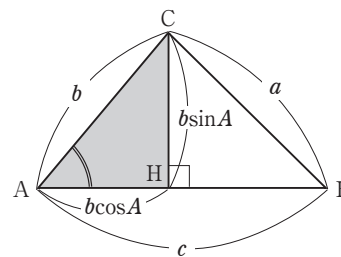
$$a^2 = (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2$$

$$= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A$$

$$= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ です})$$

完成です !!

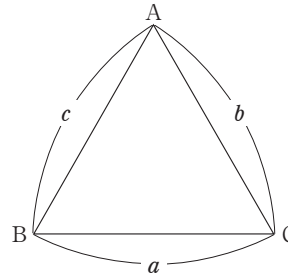


ポイント2 余弦定理の使い方

余弦定理は A、B、C について1つずつありますから、

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

の3つがあります。

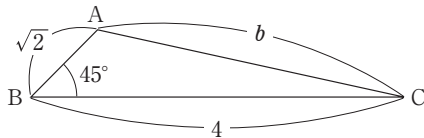


使い方は…

- ① 2 辺の長さ と 1 つの角の大きさがわかるとき、
 → もう 1 辺の長さが求められる。
- ② 3 辺の長さがわかるとき、
 → 角の大きさが求められる。

問題

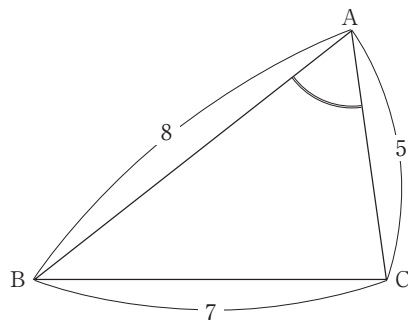
(1)



$AB = \sqrt{2}$, $BC = 4$
 $\angle B = 45^\circ$ のとき $b = ?$

問題

(2)



$AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 5$ のとき、
 $\angle A$ の大きさは?

【答え】

(1) $\triangle ABC$ において余弦定理から

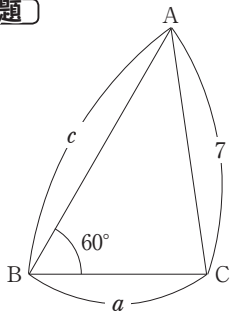
$$\begin{aligned} b^2 &= (\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 4 \times \cos 45^\circ \\ &= 2 + 16 - 2 \times \sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10 \\ b &= \pm\sqrt{10} \quad b > 0 \text{なので} \\ &\underline{b = \sqrt{10}} \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ において余弦定理から

$$\begin{aligned} 7^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos A \\ 80 \cos A &= 64 + 25 - 49 \\ &= 40 \\ \cos A &= \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \underline{\angle A = 60^\circ} \end{aligned}$$

ポイント3 正弦定理と余弦定理を使い分ける

【例題】



$\triangle ABC$ は、 $AB = c$, $BC = a$

$CA = 7$ とする

$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ のとき

(1) $c = ?$

(2) $a = ?$

【答え】

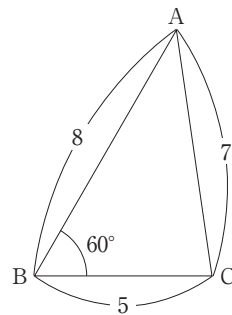
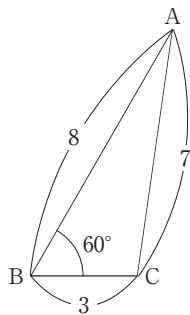
- (1) $\angle B = 60^\circ$ と対辺の長さ 7 がわかるので、
正弦定理から

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sin 60^\circ} &= \frac{c}{\sin C} \\ c &= \frac{7}{\sin 60^\circ} \times \sin C \\ &= \frac{7}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \times \frac{4\sqrt{3}}{7} \\ &= \underline{8} \end{aligned}$$

- (2) 2 辺と 1 つの角がわかるので、
余弦定理から

$$\begin{aligned} 7^2 &= 8^2 + a^2 - 2 \times 8 \times a \times \cos 60^\circ \\ a^2 - 8a + 15 &= 0 \\ (a - 3)(a - 5) &= 0 \\ a &= \underline{3, 5} \end{aligned}$$

注



の 2 種類があります！