数学Ⅰ

第28回　第３章　三角比

正弦定理

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

正弦とはサインのことです。このサインを使った定理が正弦定理です。今回は、覚えて → 使って → なぜ成り立つ？　の順で学習します。

学習のポイント

① 正弦定理とは
② 正弦定理の使い方
③ 正弦定理を用いて外接円の半径を求める

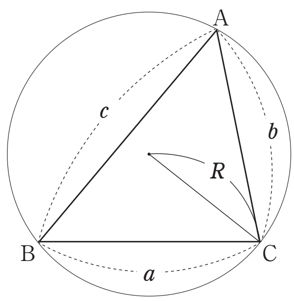
ポイント1　正弦定理とは

△ABC で、

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$　が成り立ちます。

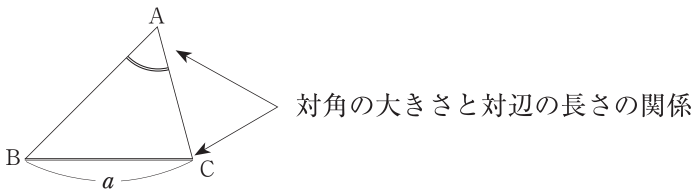
R は△ABC の外接円の半径です。

この正弦定理は、△ABC の外接円の半径を求めたり、△ABC の対角と対辺の関係がわかるときによく使います。

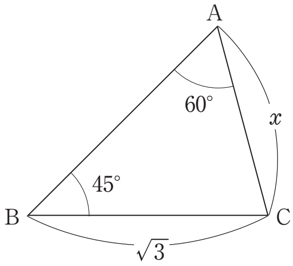


ポイント2　正弦定理の使い方

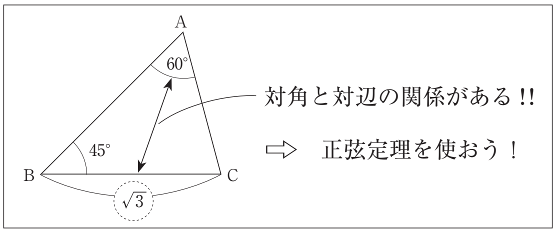
■ **使い方①**　$\dfrac{a}{\sin A}$ は、a と A つまり辺の長さ a と角 A の大きさの関係です。



例 1



$x = ?$



正弦定理より

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$$

両辺に $\sin 45^\circ$ をかけて

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ$$

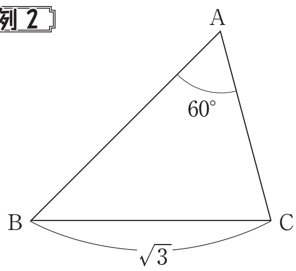
$$= \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

ポイント3　正弦定理を用いて外接円の半径を求める

■ **使い方②**　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ の R は、三角形の外接円の半径なのでこの値を求めることができます。

例 2



△ ABC の外接円の半径は？

正弦定理より

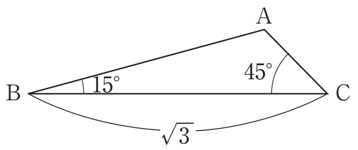
$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

よって、$R = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= 1$$

例 3



△ABC の外接円の半径を求めよ。

$\angle A = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$　なので、

正弦定理より

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R$$

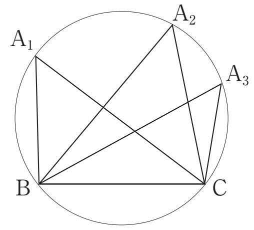
$$R = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= 1$$

なぜ正弦定理が成り立つのか？

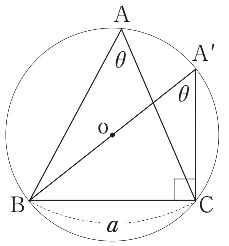
その前に…



$\angle BA_1C = \angle BA_2C = \angle BA_3C$ のように、

$\overset{\frown}{BC}$ の円周角は、1つの $\overset{\frown}{BC}$ 上の点 A_1, A_2, A_3 のどこでも同じ大きさです。

ということは…

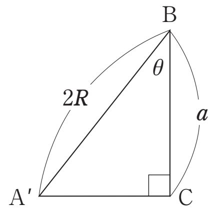


△ABC の外接円の中心 O として BA′ がこの円の直径とすると

$\angle A = \angle A'$（円周角）

これを θ とおきます。

また、$\angle BCA' = 90°$ なので、この円の半径を R とすれば、



$$\frac{a}{2R} = \sin A' = \sin A$$

よって $\sin A = \dfrac{a}{2R}$

同様にして、$\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

つまり、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ となります。