数学Ⅰ

第 26 回　第３章　三角比

三角比の相互関係

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

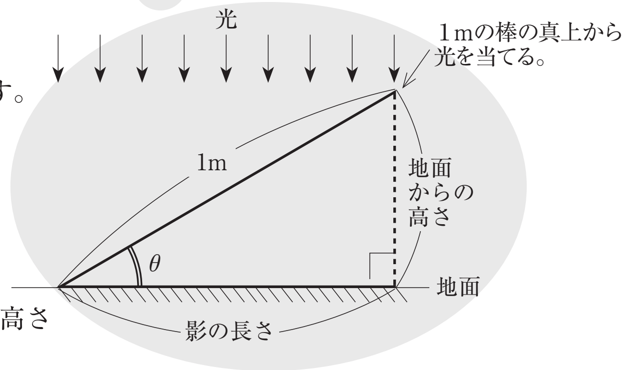
sinθ、cosθ、tanθ には特別な関係があります。この関係を覚えることで三角比の最終目標である「図形の計量」（いろいろな図形の角度や辺の長さなどがわかること）の準備をします。

学習のポイント

① $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
② $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$
③ 90° − A の三角比

ポイント1　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

まずイメージしましょう。これは大事なイメージです。

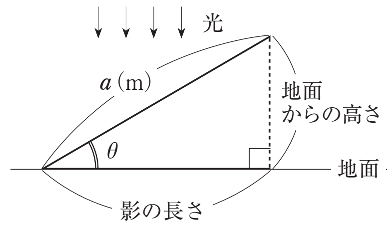


実はこの、影の長さを　$\cos\theta$
地面からの高さを　$\sin\theta$
と言います。

$$\cos\theta = \frac{底辺}{斜辺} = \frac{影の長さ}{1} = 影の長さ$$

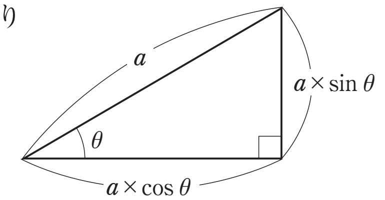
$$\sin\theta = \frac{対辺}{斜辺} = \frac{地面からの高さ}{1} = 地面からの高さ$$

ということは、棒の長さを a(m) とすると、



影の長さは、　$a \times \cos\theta$ (m)
地面からの高さは、$a \times \sin\theta$ (m)
です。

つまり

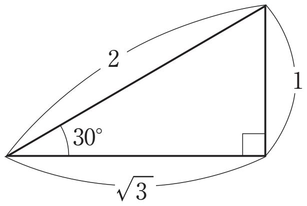


です。

$\tan\theta$ は、傾きを表しますので、$\tan\theta=\dfrac{a\times\sin\theta}{a\times\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

つまり、$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　です。

確かめてみよう！



$\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$

$\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

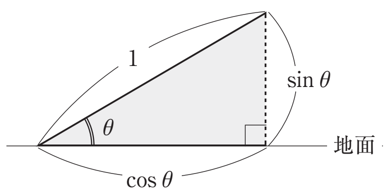
$\tan30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　です。

$$\tan30^\circ=\frac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\times2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times2}$$ （2を倍分します。）

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$ 確かになりました。

ポイント2　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$

1(m)の棒のときに使った直角三角形は右の図になります。



三平方の定理を使うと

$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1^2$　です。

ここで お約束事！

$(\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$　←　(　　)をそのまま外すのは $\boxed{\text{禁止！}}$

$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$　と書きます。

ちょっと難しい　注！

$$(\sin 30^\circ)^2 \neq \sin(30^\circ)^2 = \sin 900^\circ \quad \text{です。}$$

$$(\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad \sin 900^\circ = 0$$

同様に

$(\cos\theta)^2 \neq \cos\theta^2$　ですので、

$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$

したがって $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$　は

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　と書くのがポピュラーです。

！ $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ に限定して考えてみましょう。

① $\sin\theta$ の値がわかると $\cos\theta$ の値がわかり、さらに $\tan\theta$ の値が求められる。

② $\cos\theta$ の値がわかると $\sin\theta$ の値がわかり、さらに $\tan\theta$ の値が求められる。

③ $\tan\theta$ の値がわかると $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値が求められる。

では、①〜③の関係を問題で試してみましょう。

問題

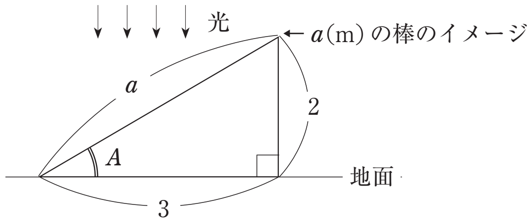
$\tan A = \dfrac{2}{3}$ のとき、$\sin A$ と $\cos A$ を求めなさい。

（ただし、角 A は鋭角とする）

解

$\tan A = \dfrac{2}{3}$ となるのは、……

（「傾き」のイメージ）



三平方の定理より

$a = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\sin A = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$，　$\cos A = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

ポイント3　90° − A の三角比

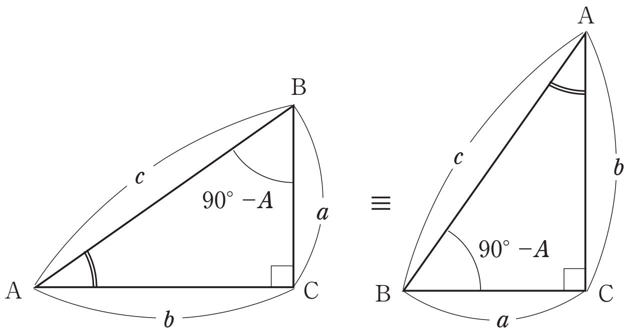
右の 2 つの三角形は合同です。

すると…、

$\sin A = \dfrac{a}{c} = \cos(90^\circ - A)$

$\cos A = \dfrac{b}{c} = \sin(90^\circ - A)$

$\tan A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - A)}$　になります。



例えば、…

$\sin 65^\circ = \cos(90^\circ - 65^\circ) = \cos 25^\circ$

$\cos 83^\circ = \sin(90^\circ - 83^\circ) = \sin 7^\circ$

これを用いると 45° 以下の三角比の値にできます。