数学Ⅰ

第24回　第３章　三角比

三角比

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

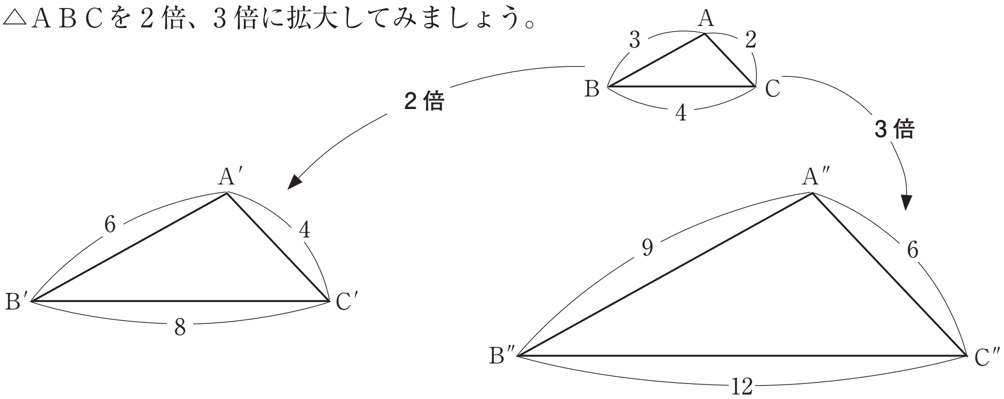
２つの相似な三角形を考えます。相似な図形は、ある図形を同じ割合で拡大や縮小した図形です。ということは、２つの相似な三角形の対応する辺の比は同じになります。相似な三角形と三角比の性質を新しい記号を使って学習していきます。

学習のポイント

① 相似な三角形と三角比
② tan θ を知る
③ sin θ、cos θ を知る

ポイント1　相似な三角形と三角比

右の△ＡＢＣを２倍、３倍に拡大してみましょう。



△ ABC ∽△ A′B′C′（∽は相似を表す記号です。）

△ ABC ∽△ A″B″C″

もちろん△ A′B′C′∽△ A″B″C″です。

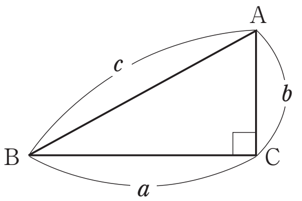
これらの３つの三角形は、大きさが異なりますが、対応する **角の大きさ** つまり **角度** は同じです。

∠ BAC ＝∠ B′A′C′＝∠ B″A″C″を単に∠ A ＝∠ A′＝∠ A″とも表します。

∠BAC＝∠B′A′C′＝∠B″A″C″のほうが位置をきちんと限定して表せますが、どちらの表現でも位置を限定できればOKです。

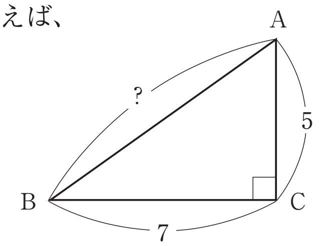
さて、ここで三平方の定理を確認します。

三平方の定理



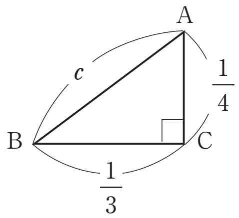
直角三角形ＡＢＣにおいて
∠C＝90°　であるならば
$a^2+b^2=c^2$　が成り立ちます。

例えば、



左図の AB の長さは？
三平方の定理から　$AB^2=7^2+5^2=74$　となり
$AB=\sqrt{74}$　です。

ではもう１問！



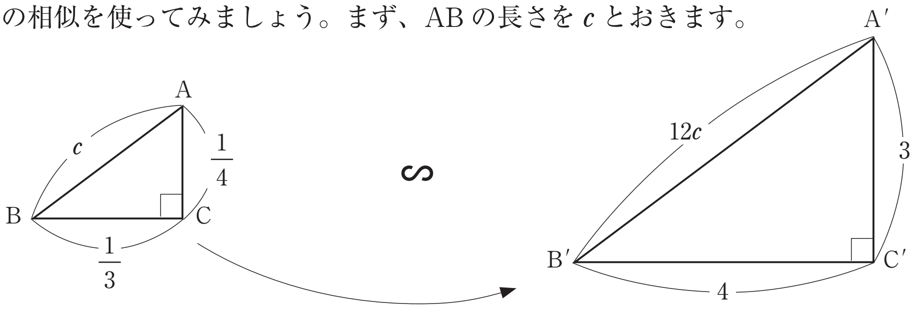
左図の AB の長さは？

三平方の定理から　$AB^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}$

通分して……これはメンドウですね！

先ほどの相似を使ってみましょう。まず、AB の長さを c とおきます。



12倍して△A′B′C′を作ります。

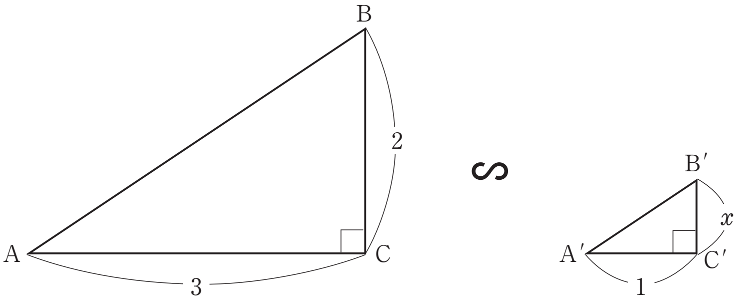
△ A′B′C′で三平方の定理から

$$(12c)^2 = 4^2 + 3^2$$
$$= 25 \quad より$$
$$12c = 5$$
$$c = \frac{5}{12} \quad となります。$$

相似を使うと面倒な計算を回避できることが多いのです。

ポイント2　tan θ を知る

まず相似のおさらいから。



△ ABC と相似な△ A′B′C′の B′C′の長さを x として x = ?

いろいろな求め方がありますがここでは、 $\boxed{\text{傾き}}$ に注意します。

AC や A′C′を底辺として傾きは、

$$\frac{CB}{AC},\ \frac{C'B'}{A'C'} \quad です。$$

相似な直角三角形ですから、この傾きは同じです。

つまり、$\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{C'B'}{A'C'}=\dfrac{x}{1}$

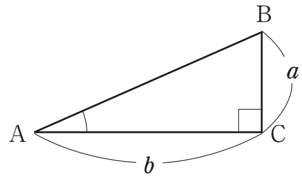
よって、$\dfrac{x}{1}=\dfrac{2}{3}$ですから、$x=\dfrac{2}{3}$ となります。

この傾きに特別な名前を付けます。 $\boxed{\text{tan}}$ と書いてタンジェント（tangent）と読みます。

本来、タンジェントはラテン語の tangere（タンジェレ）、接するという意味から来ていますが、

$\boxed{\text{傾きのイメージ}}$ で考えてください。

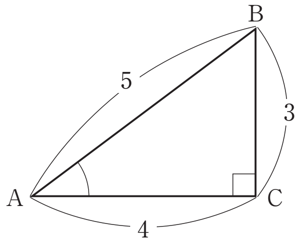
タンジェント



左図の直角三角形で

$\tan A = \dfrac{a}{b}$　と表します。

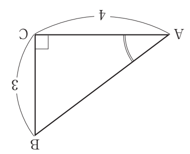
問題



$\tan A = ?$
$\tan B = ?$

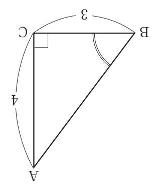
答え

ACを底辺として



$\tan A = \dfrac{3}{4}$

BCを底辺として



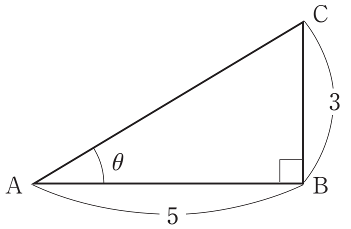
$\tan B = \dfrac{4}{3}$

ポイント3　sin θ、cos θ を知る

高校数学では、ギリシャ文字がよく出てきます。

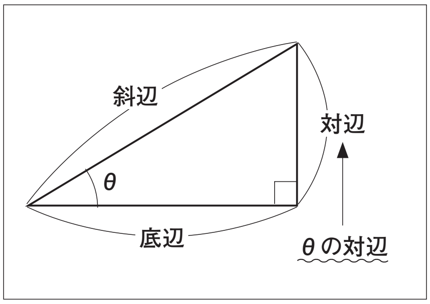
例えば、α（アルファ）、β（ベータ）、γ（ガンマ）、δ（デルタ）、ε（イプシロン）などがありますが、その中の一つ θ（シータ）は角度を表すときによく使います。

例えば、



$\tan\theta = \dfrac{3}{5}$ です。

今度は、直角三角形の斜辺と対辺、斜辺と底辺の比について考えてみましょう。



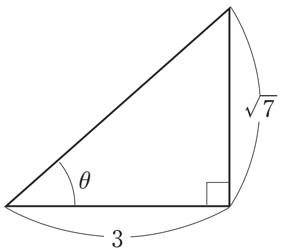
斜辺と対辺の比

$\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \sin\theta$　と表します。

斜辺と底辺の比

$\dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \cos\theta$　と表します。

例題



の $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は？

答え

斜辺の長さは $\sqrt{3^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16} = 4$ なので、$\sin\theta = \dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$、$\cos\theta = \dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \dfrac{3}{4}$ です。