

2次関数のグラフと2次方程式

監修・執筆
 湯浅弘一

今回学ぶこと

方程式をグラフでビジュアル化してみましょう。グラフで把握する習慣を持つことで今後、不等式もビジュアル化できます。ある意味、方程式を体感するのが目的です。

学習のポイント

- ① グラフ上の方程式の解とは
- ② 2次方程式の解の個数とグラフの共有点の関係
- ③ 2次関数が x 軸に接することと解の個数

ポイント1 グラフ上の方程式の解とは

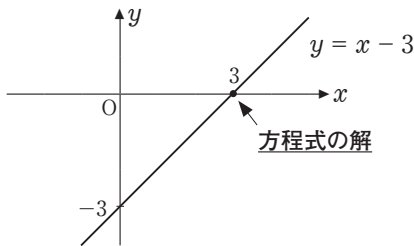
方程式をグラフでイメージしてみましょう。

x の1次方程式、

$x - 3 = 0$ を解くと $x = 3$

この $x - 3 = 0$ を $\begin{cases} y = x - 3 & (\text{直線}) \text{ と} \\ y = 0 & (x \text{ 軸}) \end{cases}$ を連立したと考えると

方程式の解は、 $\begin{cases} y = x - 3 & (\text{直線}) \text{ と} \\ y = 0 & (x \text{ 軸}) \end{cases}$ の共有点の x 座標になる。



これを2次方程式で考えると

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ を解くと因数分解して、}$$

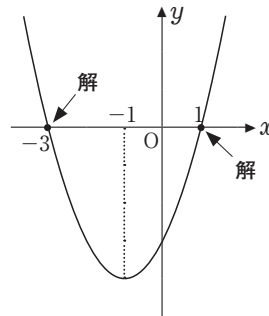
$$(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x = 1, -3$$

2次方程式 $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は、

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 & (2\text{次関数}) \\ y = 0 & (x\text{軸}) \end{cases} \text{ の共有点の } x \text{ 座標と考えて、}$$

$x = -3$ または $x = 1$ となります。



ポイント2 2次方程式の解の個数とグラフの共有点の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) をグラフで考えてみましょう。

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & (2\text{次関数}) \\ y = 0 & (x\text{軸}) \end{cases} \text{ の共有点の } x \text{ 座標と考えて、}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ を解の公式を用いて、

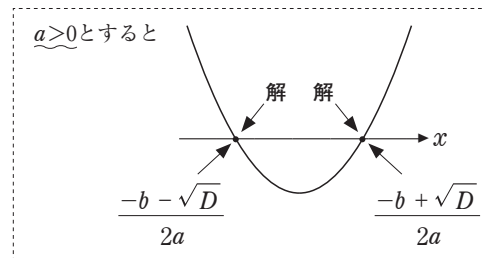
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

複雑な $\sqrt{\quad}$ の中を D とおいてみましょう！

$$D = b^2 - 4ac$$

そうすると、 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ と表すことができます。

2次関数と x 軸との共有点が $ax^2 + bx + c = 0$ の解になります。



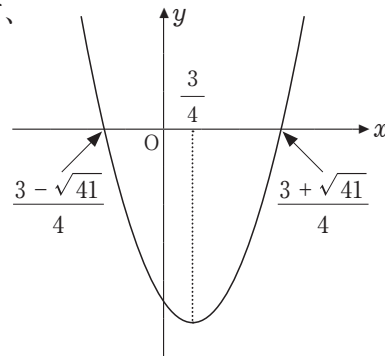
例えば、

$2x^2 - 3x - 4 = 0$ を考えると、解の公式を用いて、

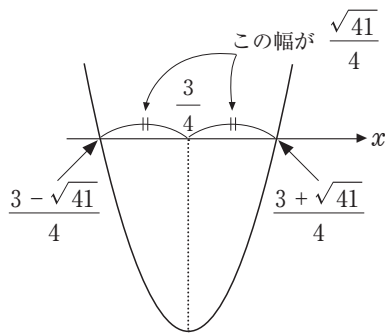
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

グラフを使うと $\begin{cases} y = 2x^2 - 3x - 4 \\ y = 0 \end{cases}$ の共有点を考えて、
右図のようになります。



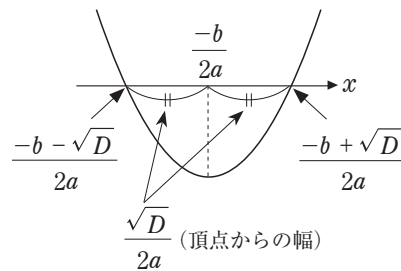
ちなみに、



左図のように、 $x = \frac{3}{4}$ を軸として左右が等しくなります。

ポイント3 2次関数がx軸に接することと解の個数

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > c$) をグラフで考えたとき、
右図のグラフとなります。

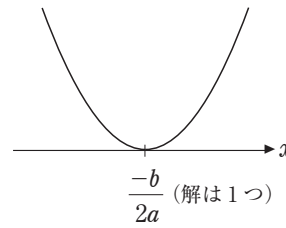


ここでグラフを上へ移動して(右図)みましょう。

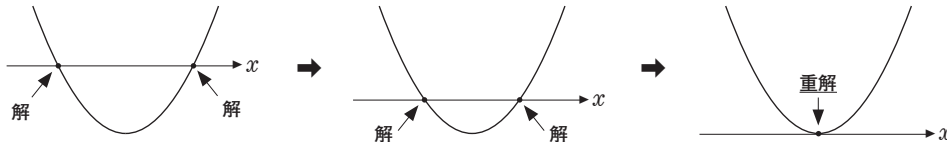
$$\text{幅} \frac{\sqrt{D}}{2a} = 0$$

つまり、 $\sqrt{D} = 0$

$\sqrt{\quad}$ の中の $b^2 - 4ac = 0$ のとき解は1つになります。



イメージ

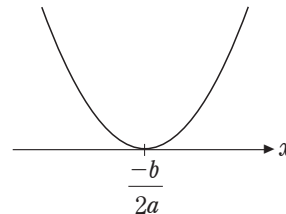


つまり、 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の $D = b^2 - 4ac = 0$ のとき、この2次方程式は1つだけ解を持ちます。

2つの解が重なったので、重解 $x = \frac{-b}{2a}$ となります。

このときの $y = ax^2 + bx + c$ は、

x 軸と接していて接点は、 $(\frac{-b}{2a}, 0)$ です。



まとめ

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の $D = b^2 - 4ac$ とすると

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D > 0$: 異なる2つの(実数)解を持つ

$D = 0$: 重解を持つ(実質の解は1つ)

$D < 0$: 解なし

問題

次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3x - 10$

(2) $y = x^2 - 4x + 4$

(3) $y = 2x^2 - 5x + 5$

解

x 軸は、 $y = 0$ なのでそれぞれの式を連立します。

(1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0 \text{ より}$$

共有点は、2個

(2) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0 \text{ より}$$

共有点は、1個

(3) $2x^2 - 5x + 5 = 0$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 5 = -15 < 0 \text{ より}$$

共有点は、ない