数学Ⅰ

第19回　第2章　2次関数

2次関数と2次関数のグラフ（2）

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

数学Ⅰの中でも難しい項目です。2次式を平方完成と呼ばれる形に変形できることが今回、最大の目標です。手順をキチンと覚えて身につけましょう。

学習のポイント

① 平方完成とは
② $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ
③ $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

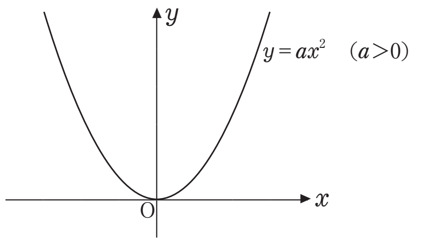
ポイント1　平方完成とは

■準備＆おさらい

$y = ax^2 + bx + c$　$(a \neq 0)$ を x の2次関数と言います。
これを関数（function）の頭文字を使って、

　　$y = f(x)$　と表すことにします。

つまり、$f(x) = ax^2 + bx + c$ です。
さて、下図は $y = ax^2$ のグラフです。



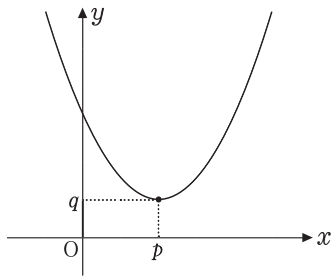
この $y = ax^2$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q 平行移動したグラフは、
　x の代わりに、$x - p$
　y の代わりに、$y - q$　を　$y = ax^2$ に代入して、

$y - q = a(x - p)^2$

となります。$-q$ を右辺に移項して、

$y = a(x - p)^2 + q$ ………… ※

これをグラフにかくと右のようになります。頂点は $(p,\ q)$ です。
$y = ax^2 + bx + c \longrightarrow y = a(x - p)^2 + q$　この変形を行うことを $\boxed{\text{平方完成}}$ と言います。



■平方完成の手順の準備

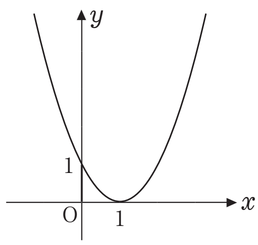
準備：因数分解の公式 $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{cases}$ を使います。

$y = x^2 - 2x + 1$

因数分解の公式により

$y = (x - 1)^2$

※より、$y = (x - 1)^2 + 0$
頂点は $(1,\ 0)$



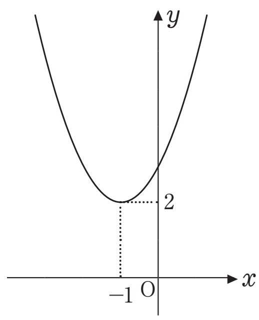
$y = x^2 + 2x + 3$ のグラフは

前の2つの項を平方完成する

$y = (x + 1)^2 - 1^2 + 3$
$= (x + 1)^2 + 2$

注：$\boldsymbol{x^2 + 2ax}$ **は**
$\boldsymbol{(x + a)^2 - a^2}$
(うしろ)² をひく！

※より、頂点は $(-1,\ 2)$



ポイント：$x^2 + 2x$ の**1次の係数の半分を使って平方完成。**
つまり、$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$
2の半分

■平方完成の手順

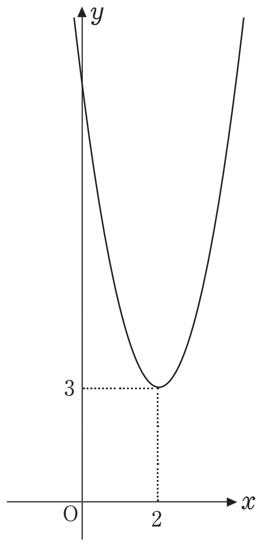
STEP 1　x^2 の係数で x^2 と x の項をくくる。
STEP 2　STEP1 の後にできる x の係数の半分を使って平方完成をする。
STEP 3　$y = a(x - p)^2 + q$ の形に整える。

$y = 2x^2 - 8x + 11$ の頂点は……、

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 8x + 11 \\
&= 2(x^2 - 4x) + 11 \\
&= 2\{(x - 2)^2 - 2^2\} + 11 \\
&= 2(x - 2)^2 - 8 + 11 \\
&= 2(x - 2)^2 + 3
\end{aligned}
$$

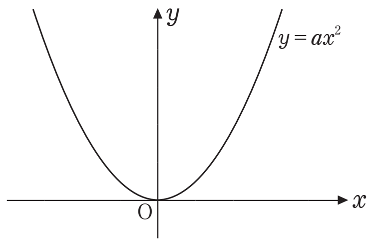
x^2 の係数で x^2 と x の項をくくる（STEP 1）
（　）内を平方完成する

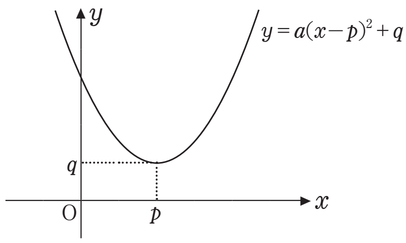
頂点 (2, 3)



ポイント2　$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

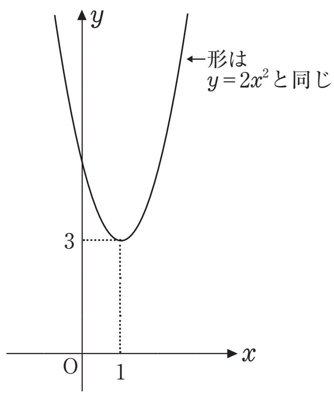
※より、$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフの頂点は、(p, q) です。**形は、$y = ax^2$ と同じです。**





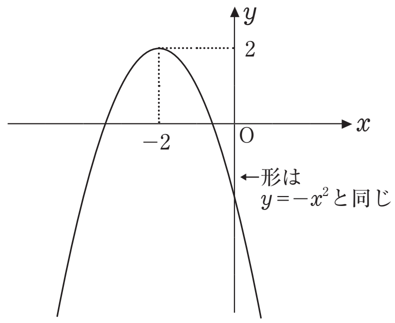
例１：

$y = 2(x - 1)^2 + 3$ のグラフは、



例２：

$y = -(x + 2)^2 + 2$ のグラフは、



ポイント３　$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

早速、平方完成の出番です。　$y = 2x^2 - 3x + 4$ のグラフは？

$$y = 2x^2 - 3x + 4$$

（STEP 1）

$$= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 4$$

↓　**半分**

（STEP 2）

$$= 2\left\{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} + 4$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 4$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$

頂点は、$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$　　形は、$y = 2x^2$ と同じ