数学Ⅰ

第11回　第1章　数と式

分母の有理化

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

有理化することとは、無理数から有理数を作ることです。特に分数の場合、分母に√（ルート）を含む数を避ける約束になっています。この約束に基づいて、分母から√をなくすことを分母の有理化と言います。今回はこの分母の有理化の具体例を学習します。

学習のポイント

① 分母の有理化とは
② 分母に√を含む計算
③ 分母の有理化を含む計算

ポイント1　分母の有理化とは

数学Ⅰでは√を含む数のうち“分数の分母には特別な場合※を除いて√を書かないこと”というルールがあります。

例えば、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div \sqrt{2} \quad \left(\text{分数は、}\frac{a}{b} = a \div b\right)$$
$$= 1 \div (1.414\cdots)$$

これは筆算できません。しかし後で述べますが、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \div 2 \quad (\text{分母から}\sqrt{\ }\text{をなくすと}\cdots)$$
$$= (1.414\cdots) \div 2$$
$$= 0.7\cdots \qquad \text{ぐらいのイメージがつきます。}$$

番組よりちょっと難しい話！

●※専門的な数学の世界では

$a\sqrt{b}$ つまり、○$\sqrt{\triangle}$ の形をしている数を無理数と言います。

無理数の世界で、たしたり（＋）、ひいたり（－）、かけたり（×）、わったり（÷）を考えることがあります。この世界を考えるときには、分母に√をなくして考えるルールがあるのです。しかし、分母に√を残したままのほうが見た目がきれいに見える無理数（この無理数は限られていますが……）などはそのまま√を残すこともあります。

ちょっと、難しいですね！

ポイント2 分母に $\sqrt{\ }$ を含む計算

さて、実際に有理化をしてみましょう。

■２つのタイプ

（ｉ）$\dfrac{▲}{\sqrt{●}}$ と （ii）$\left(\dfrac{■}{\sqrt{●}+\sqrt{▲}} や \dfrac{■}{\sqrt{●}-\sqrt{▲}}\right)$

があります。

（ｉ）$\dfrac{▲}{\sqrt{●}}$

$a>0,\ b>0$ として、これは、$\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ の形をしています。

$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ なので $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ の分母と分子に分母と同じ数 $\sqrt{a}$ をかけます。

つまり、$\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\dfrac{b\sqrt{a}}{a}$

これで、分母から $\sqrt{\ }$ が消えました。これを分母の **有理化** と言います。

例えば、$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は、$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の分母と分子に分母の $\sqrt{3}$ をかけます（「約分」の反対で「$\sqrt{3}$ を倍分する」）。

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

（$\sqrt{3}$ が２つで３になり $\sqrt{\ }$ をなくせる）

もし、$\dfrac{2}{\sqrt{12}}$ だったら…、$\sqrt{12}=\sqrt{2\times2\times3}$

$=2\sqrt{3}$　ですから、

$$\frac{2}{\sqrt{12}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}$$

まず、2で約分

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

前述と同じように $\sqrt{3}$ を倍分

$$=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ となります。

（ii）$\dfrac{■}{\sqrt{●}+\sqrt{▲}}$、$\dfrac{■}{\sqrt{●}-\sqrt{▲}}$

$a>0$、$b>0$として

$\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$、$\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ の形です。

乗法公式の和と差の積は2乗の差！

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$$
$$=a-b$$ であることを用いて

$\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ には、$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ を倍分、

$\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ には、$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を倍分します。

符号に注意です！

練習① 次の式の分母を有理化してみましょう。

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

※分母の有理化には、$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ を倍分します。

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{1\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$ となり分母の有理化ができました。

⬅ 分母が
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
$=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$
$=a-b$

練習② 次の式の分母を有理化してみましょう。

$$\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{8\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{8\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{8(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$$

$$=\frac{8(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

4で約分

$$=2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

ポイント3 分母の有理化を含む計算

問題 次の式の分母を有理化しなさい。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

解

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

分母を有理化

$$=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}$$

分母は和と差の積は2乗の差

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-(\sqrt{2}-1)$$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{2}+1$$

$$=1$$