

実数の分類

監修・執筆
湯浅弘一

今回学ぶこと

数にはどんな数がありますか？ と聞かれたときに何と答えるでしょうか？ 小数、分数……数学 I では、分数で表される数を有理数と特別な言い方をします。そして、有理数ではない数を無理数といいます。今回はこれらの言葉と無理数の中でも $\sqrt{\quad}$ を含む数の計算について学習します。

学習のポイント

- ① 実数とは
- ② 無理数と有理数
- ③ $\sqrt{\quad}$ の簡単な計算

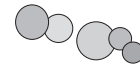
ポイント1 実数とは

実数とはその名のとおり、「実際に存在している数」のイメージです。世の中に身近にある数は、すべて実数です。

- 温度計 → -3°C 、 -2°C 、 -1°C 、 0°C 、 1°C 、……
- ケーキの $\frac{1}{8}$ カット
- 円周の長さは、直径 $\times \pi$ の $\pi = 3.1415\cdots$
- 直角二等辺三角形の辺の比、 $1:1:\sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$

これらはすべて目の前にある数、**実数** なのです。

英語で、real number と言います。リアルなんです。real は、“実際の”“実在する”という意味です。



ポイント2 無理数と有理数

■まず、有理数から

1、2、3、4、5、…、1つ、2つ、3つ、…と数えるときの1、2、3、…を **自然数** と言います。ただ、0つとは言いませんので1からです。

さらに、-3、-2、-1、0、1、2、3……これを **整数** といい、-3、-2、-1を **負の整数** 。1、2、3……を **正の整数** と言います。

この整数を使って分数を作ります。

$\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ を **有理数** と言います。

(ただし、分数の分母には“0”はきません)

さて、数にはこの有理数で表せないものがあります。

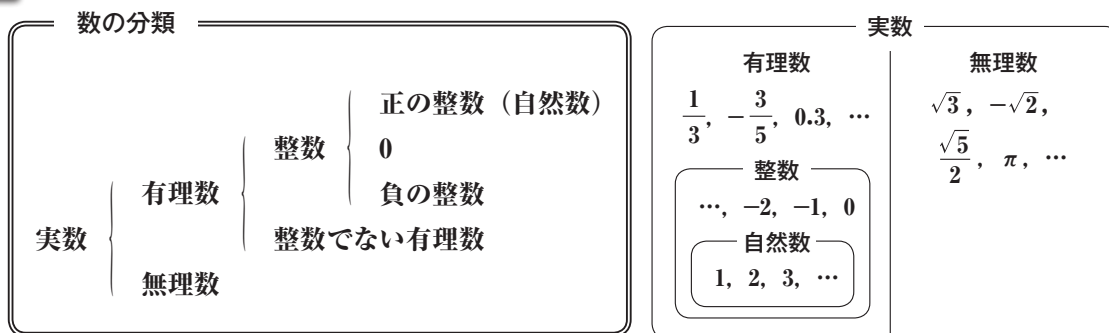
例えば、 $\pi = 3.1415\dots$

$\sqrt{2} = 1.4142\dots$

$\sqrt{3} = 1.7320\dots$

これらは $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ の形では表せません。このような、 π 、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ などを **無理数** と言います。

まとめると



ポイント3 $\sqrt{\quad}$ の簡単な計算

■平方根

まず、 $x \times x = 1$ となる x を求めてみましょう。

つまり、同じ数を2回かけて、1になる数です。



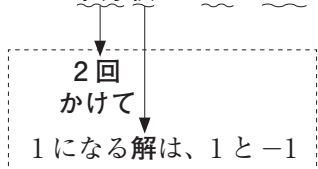
同じ数を2回かけることを2乗と言います。これを別の言い方で **平方** と言います。

この $x \times x = 1$ の x を方程式の **解** (答え) と言います。

解を **根** とも言うので、 $x \times x = 1$ となる x は、**1の平方根** と呼びます。

したがって、

1の平方根は、1と-1です。



と言うことは、4の平方根は？ $x \times x = 4$ ですから、 $x = 2$ と -2 となります。

では、3の平方根はどうでしょう？

$x \times x = 3$ となる x です。

ここで登場するのが $\sqrt{\quad}$ の記号です。 $\sqrt{\quad}$ はルートと読みます root は、植物などの「根」を表すことから、根源、根本という意味もあるのです。

そこで、 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ と定めます。

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \text{ の形です。}$$

ただし、 $a \geq 0$ です。

また、 $(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = 3$ になります。これは、負の数 \times 負の数 = 正の数だからです。

と言うことから、 $x \times x = 3$ となる x は、

$$x = \sqrt{3} \text{ あるいは、} x = -\sqrt{3}$$

つまり、3の平方根は、 $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ となります。

一般に $a \geq 0$ のとき、 $\sqrt{\quad}$ がついているときは、 $\sqrt{\quad}$ の中の数字は0以上であるルールがありますので $\sqrt{\quad}$ の中の数字が負になることは、数学 I ではありません。この学習メモの最期のほうも読んでくださいね。

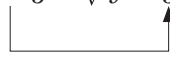
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \text{ となります。}$$

■ $\sqrt{\quad}$ の簡単な計算

$a \geq 0$ のとき

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a \text{ です。}$$

例えば、 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9} = 3$ です。



2つの同じ(0以上の)数のうちの1つが出る。

• まとめ •

$a \geq 0$ のとき

[1] $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

[2] $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

[3] [1] と [2] から $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a$

また、 $a \geq 0, b > 0$ のとき

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ となります。}$$

👉 使ってみましょう!

Q1: 次の計算をなさい。

① $\sqrt{18}$

② $\sqrt{180}$



番組よりちょっと難しい話!

$a < 0$ でも、 $a = 0$ でも、 $a \geq 0$ でも

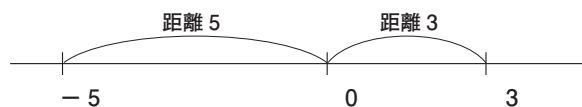
$\sqrt{a^2}$ の計算ができます。

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = a \quad \leftarrow \text{は、} \times \text{ です。}$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a \times a} = |-a| \text{ で、絶対値になります。}$$

絶対値とは、その数の大きさだけを表します。ちょうど、数直線の0からの距離です。

ですから、



$$|-5| = 5, |3| = 3 \text{ となります。}$$

ということは……、 $\sqrt{a^2} = a$ と仮定すると

$$\sqrt{(-5)^2} = -5 \text{ は、間違いです。} \leftarrow (a = -5)$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \text{ となります。}$$

||

$$(\sqrt{25})$$

ちょっと、難しいですね!

