第35回

確率を楽しむ

講師
湯浅 弘一

身近にあることは？

１０００円以上の買い物をすると箱の中からくじを引くことができ，当たれば何か景品がもらえる。
そんな経験ありませんか？
最近では，箱の中からくじを引くのではない，デジタルなくじもありますね。
パソコンの画面上でくじが引けるというのは，騙された感があるかもしれませんが・・・。
しかし，デジタルなくじ引きの方が実は当たる確率がいつでも均等にできるので，誰しもが同じ確率で当たることになります。
さて，今回はあえてアナログなくじを引くことを考えてみましょう！

確認しましょう

最初に前回のおさらいです☆

例題１

赤い玉が３個、白い玉が２個入っている袋の中から１個を取り出すとき
赤い玉が出る確率は？

【考え方】
この問題，直感的にも解けそうですね。
全部で５個の玉の中から３個のうちの１個の赤を取り出す確率ですから，

赤の出る確率は $\dfrac{\text{赤の出る場合の数}}{\text{全事象の場合の数}}$ なので，

答えは $\dfrac{3}{5}$ です。

ここで注意すべきポイントは“物はすべて区別ができる”ということです。
３個の赤い玉には（R１）（R２）（R３），２個の白いたまには（W１）（W２）のような名前が付いているとイメージしてください。すると，その５個の中から１個を取り出すとき，（R１）（R２）（R３）（W１）（W２）の中のどれかが出ます。つまり全事象は５通りです。
ここで，この５個の中から赤１個を取り出すことを考えると，その１個は（R１）または（R２）または（R３）の３通りが考えられるので，求める確率は $\dfrac{3}{5}$ になるのです。

問題１

全部で１００本のくじのうち当たりくじが１０本含まれています。
袋の中から１本を取り出すとき当たりくじを引く確率は？

【考え方】

１００本のくじも，すべて区別ができます。
ですから１００本中１０本の当たりを引くので

$$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

となります。

問題２

全部で１０本のくじのうち当たりくじが２本含まれています。
袋の中から１本ずつ２回くじを取り出すとき，１回目は当たりで２回目がハズレになる確率は？ただし，引いたくじは１回１回元に戻すとします。

【考え方】

１回目に当たりを引く確率は $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ です。

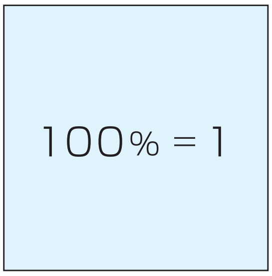
２回目にハズレを引く確率は $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ です。

ですから，求める確率は

$$\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$$

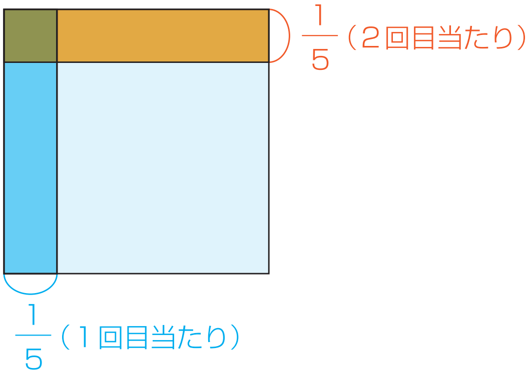
となります。

先ほどの問題２を直感的なイメージで考えてみましょう。

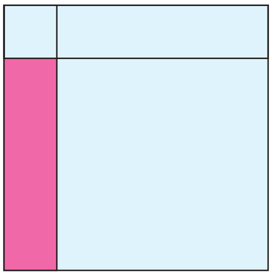


この正方形が，すべてのくじの引き方を表しているとしましょう。

すると・・・



となるので，１回目に当たりが出て，２回目にハズレが出るときは・・・



図のピンク色の部分を考えればよいですね！

１回目と２回目が同時に起こるので，ピンクの長方形の面積は

$$\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$$

となります。

このように，同時に起こるときは，かけ算で求めることができます。

問題３

全部で１００本のくじのうち，当たりくじが１０本含まれています。
袋の中から２本同時にくじを取り出すとき，
１本が当たりで，もう１本がハズレになる確率は？

【考え方】
２本を同時に取るということは，１本ずつ２回取るのとは別です。
２本同時にとることは１００本の中から２本を組み合わせることなのです。
例えば，「くじ１番」と「くじ２番」を同時に引くことと，「くじ２番」と「くじ１番」を同時に引くことは同じですよね。

くじ２本の取り方（全事象）の場合の数は

$${}_{100}C_2 = \frac{100 \times 99}{2 \times 1} = 4950 \text{(通り)}$$

そのうち，当たり１０本の中から１本と，ハズレ９０本の中から１本を取る場合の数は，

$${}_{10}C_1 \times {}_{90}C_1 = 10 \times 90 = 900 \text{(通り)}$$

求める確率は　$\dfrac{900}{4950} = \dfrac{2}{11}$　となります。

問題４

袋の中に赤い玉が２個、白い玉が２個、黒い玉が２個の合計６個が入っています。
この中から３個を同時に取ったとき、３色すべてが揃う確率を求めなさい。

【考え方】
玉に（赤１）（赤２）（白１）（白２）（黒１）（黒２）と名前をつけて考えます。
（物は全て区別ができることに注意しましょう！）
全事象の場合の数は

$${}_{6}C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{(通り)}$$

そのうち，３色すべてが揃うとは，赤，白，黒から各１個ずつ取ることなので，
どの色も各２個ずつあることから，この場合の数は以下のように求められます。

$${}_{2}C_1 \times {}_{2}C_1 \times {}_{2}C_1 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{(通り)}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$　となります。

問題５

私とＡさんがくじを引くとき，私がＡさんより当たりやすくなるのは私が先に引くときであるか？それともＡさんの後に引いた方ときであるか？ ただし，引いたくじは元に戻さないとし，当たりくじもハズレくじも十分にあるとします。

【考え方】

当たりくじが a 本，ハズレくじが b 本、合計 $a+b$ 本のくじがあるとします。

（１）最初に私が引いて当たる確率は $\dfrac{a}{a+b}$ です。

（２）最初にＡさんが引いて，その後に私が引いて当たる場合は以下の２通りが考えられます。

（ｉ）Ａさんが当たって，私も当たる。

→ 確率は $\dfrac{a}{a+b} \times \dfrac{a-1}{a+b-1}$

（ⅱ）Ａさんがハズレて，私が当たる。

→ 確率は $\dfrac{b}{a+b} \times \dfrac{a}{a+b-1}$

（ｉ）（ⅱ）が同時に起こることはないので，和をとって

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1} &= \frac{a(a-1)+ab}{(a+b)(a+b-1)} \\ &= \frac{a(a-1+b)}{(a+b)(a+b-1)} \\ &= \frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

このように，（１）のときも（２）のときも同じ確率になります。
なぜなら・・・事前確率だからです☆