第33回

組み合わせ

講師
湯浅 弘一

身近にあることは？

カード $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

これを１列に並べて３桁の数をつくるとすると，

１２３
１３２
２１３
２３１
３１２
３２１

の６通り。階乗の記号を使って計算で求めると ３！＝３×２×１＝６(通り) です。

さて，ここでカードを $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{2}$ に変更します。

これを１列に並べて３桁の数をつくると，上の $\boxed{3}$ が $\boxed{2}$ に変わったので，
先ほどの６通りは

１２３ ⇨ １２２
１３２ ⇨ １２２
２１３ ⇨ ２１２
２３１ ⇨ ２２１
３１２ ⇨ ２１２
３２１ ⇨ ２２１

同じものがでてくるので，まとめると

１２２
２１２
２２１

の３通りです。
これを計算で求めることを考えましょう。

例えば， $\boxed{3}$ が $\boxed{2}$ に変わると

２３ ⇨ ２２

３２ ⇨ ２２

となり，どちらも２２になります。

つまり，２３と３２の順列２！＝２通り ⇨ １通りになるということです。

半分になるということですから，先ほどの問題は

$$3! \times \frac{1}{2!} = 3\text{（通り）}$$

と求められます。

確認しましょう（１）

A、B、C、D の４人の中から２人を選ぶ仕方の場合の数は何通りでしょうか？

すべて列挙してもよいですが、ここは組合せの公式を使いましょう。

n 個の物から r 個を選ぶ仕方は ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ です。

これを使うと

${}_4C_2 = \dfrac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$（通り）です。（これが組合せの公式です！）

実際に書きだしてみてもわかります。

AB，AC，AD，BC，BD，CD の６通りです。

問題１

ＡＢＣＤＥＦの６人の中から３人組を１組だけ選ぶ仕方は？

【考え方】

公式を使ってみましょう

$${}_6C_3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1} = 20\text{（通り）}$$

となります。

問題２

A―B―C―D―E―F―G

からなる鉄道があります。
例えば，Ｃ駅→Ｆ駅のような片道きっぷは何通りできるでしょうか？
また，例えば，Ｃ駅⇄Ｆ駅のような往復きっぷは何通りできるでしょうか？

【考え方】
片道きっぷは「出発駅 → 到着駅」です。
出発駅にはＡ～Ｇの通り，到着駅には出発駅以外の６通りが入りますから
７×６＝４２(通り) です。
また，往復きっぷは出発駅と到着駅を入れ替えても変わりません。
つまり，「Ｃ駅⇄Ｆ駅」と「Ｆ駅⇄Ｃ駅」のきっぷは同じきっぷになりますから
片道きっぷの４２通りの半分，つまり ４２÷２＝２１(通り) になります。

確認しましょう（2）

ＡＢＢＢの４文字をすべて使って一列に並べる仕方の数を求めることを考えます。
まず，ＡＢＣＤの４文字の順列の数は
４！＝４×３×２×１＝２４(通り)
です。しかし，Ｃ⇨Ｂ，Ｄ⇨Ｂになるので，Ｂ，Ｃ，Ｄの順列は
ＢＣＤ ⇨ ＢＢＢ
ＢＤＣ ⇨ ＢＢＢ
ＣＢＤ ⇨ ＢＢＢ
ＣＤＢ ⇨ ＢＢＢ
ＤＢＣ ⇨ ＢＢＢ
ＤＣＢ ⇨ ＢＢＢ
６通りが１通りになります。
つまり全体の $\frac{1}{6}$ になるので，ＡＢＣＤとしたときの２４通りの６分の１ですから，
$24\times\frac{1}{6}=4$(通り)
となります。

《参考》

実際にＡＢＢＢの順列を書きあげてみると…

ＡＢＢＢ
ＢＡＢＢ
ＢＢＡＢ
ＢＢＢＡ

の４通りです。

問題３

ＡＡＢＢＢの５文字をすべて使って一列に並べる仕方の数を求めなさい。

【考え方】

ＡＢＣＤＥの５文字の順列の場合の数ならば

５！＝５×４×３×２×１＝１２０（通り）

です。

ここでＣ⇨A，Ｄ⇨B，Ｅ⇨Ｂと考えると，ACとCAが共にAAになります。

つまり 2通り⇨１通り

ですから

BDEを並び替えたものは，すべてＢＢＢの１通りになります。

つまりＢＤＥの順列 ３！＝３×２×１＝６（通り）はすべてＢＢＢの１通りに変わるということ

です。

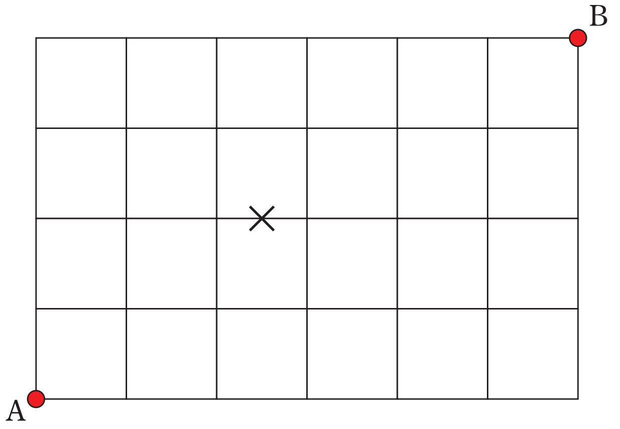
したがって，６通り⇨１通り

まとめると

$$\frac{5!}{3!\times 2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1\times 2\times 1}=10\text{（通り）}$$

問題４

右の図のような格子状の道筋を
Ａ からＢまで行くとき、
最短経路は何通りありますか？
また、図の×印が通れないと
すると、Ａ からＢまで行くとき、
最短経路は何通りありますか？

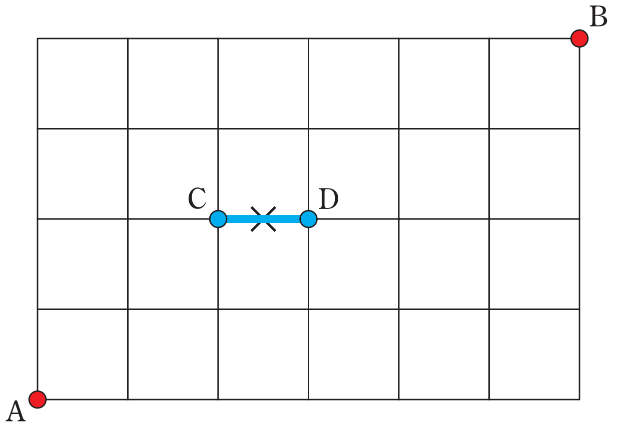


【考え方】

→（１区間右に行くこと）をＲ，↑（１区間上に行くこと）をＵと表すことにします。
Ａ からＢまでは，→が６個と↑が４個あります。
すると，ＲＲＲＲＲＲＵＵＵＵの順列だけあるので，

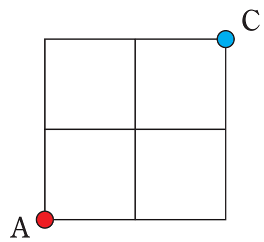
$$\frac{10!}{6!\times 4!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1)\times(4\times 3\times 2\times 1)}=\frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}=210\text{（通り）}$$

次に右の図のようにＣとＤを定めると，
CD 間が通れません。
そこで，ＣＤ間を通る場合の数を求めて
全体の場合の数２１０通りから引けば
ＣＤ間を通らない場合の数を求めること
ができます。



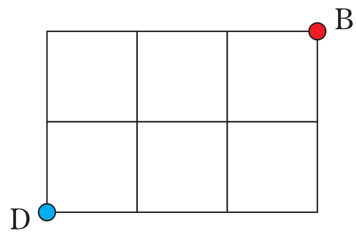
まず、右の図からＡ→Ｃへの行き方は
→が２回↑が２回，つまりＲＲＵＵの順列を考えます。

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 2\times 1}=6\text{（通り）}$$



次に，下の図からＤ→Ｂへの行き方は
→が３回↑が２回，つまりＲＲＲＵＵの順列を考えます。

$$\frac{5!}{2!\times 3!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 3\times 2\times 1}=10\text{（通り）}$$



したがって，Ａ→Ｃ→Ｄ→Ｂの行き方は ６×１×１０＝６０（通り）
ですから，ＣＤ間を通らない行き方は
２１０－６０＝１５０（通り）
となります。