第23回

原点以外に頂点をもつ2次関数

講師
湯浅 弘一

身近にあることは？

2 次関数のグラフの頂点がいつも原点とは限りません。
むしろ原点を頂点とする 2 次関数の方が珍しいくらいです。
そこで，今までの平行移動の公式を参考に，2 次関数の頂点を求めてみましょう。

確認しましょう

前回の公式の確認です。
グラフを右に (x 軸方向に) a 移動するときは

$x \Rightarrow x - a$

グラフを上に (y 軸方向に) b 移動するときは

$y \Rightarrow y - b$

に置き換えることで，平行移動後の式をつくることができます。
ということは，$y = x^2$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 平行移動した式は

$x \Rightarrow x - 1$

$y \Rightarrow y - 2$

と置き換えて

$y - 2 = (x - 1)^2$

つまり

$y = (x - 1)^2 + 2$

となります。
頂点は…(1，2) です。

これを，式の変形から作っていくのが今回の目標です。
その方法を「平方完成」といいます。
平方とは 2 乗のこと。
つまり (　　)^2 の形をつくることです。
$y = (x - a)^2 + b$ の形を作ると頂点の座標が $(a,\ b)$ とわかります。

このとき、

乗法公式 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

乗法公式 $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

を使います。この式の左辺と右辺を入れ替えた

$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

をつくります。

ここがポイント☆

$y=x^2+2ax$ を平方完成してみましょう。

x の係数 $2a$ に注目します。

この $2a$ の半分を使います。そして，それを２乗して引き算します。

$$y=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$$

半分　２乗した数を引く

まとめると・・・

Step1　x の係数の半分を求めます

Step2　Step1 の数を使って $(\quad)^2$ を作り，Step1 の数の２乗を引きます。

早速，問題を解いてみましょう！

問題１

$y=x^2-6x+8$ の頂点の座標を求めなさい。

【考え方】

$y=x^2-6x+8$

$=(x-3)^2-(-3)^2+8$

$=(x-3)^2-9+8$

$=(x-3)^2-1$

となるので，頂点は $(3,-1)$ と求められます。

問題２

$y = x^2 - 4ax + 5a^2$ の頂点の座標を求めなさい。

【考え方】

$y = x^2 - 4ax + 5a^2$

$= (x - 2a)^2 - (2a)^2 + 5a^2$

$= (x - 2a)^2 - 4a^2 + 5a^2$

$= (x - 2a)^2 + a^2$

となるので，頂点は $(2a,\ a^2)$ と求められます。

問題3

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \fallingdotseq 0)$ の解の公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ を導きなさい。

【考え方】

解の公式は平方完成を使って導くことができます。

$ax^2 + bx + c = 0$ の両辺を $a \fallingdotseq 0$ で割ります。

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ここで左辺を平方完成します。赤い波線の部分から (　)^{2}を作りましょう。

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

これは x の２次方程式です。

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

ルートの中を計算します。

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

ルートの中をもう少し計算してみましょう。

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4a \times c}{4a \times a}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ルートの中の分母の部分はルートを使わないで表すことができます。

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

左辺の$+\dfrac{b}{2a}$を右辺に移項して

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

つまり

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となります。