

## 規則性・論理で遊ぼう

講師  
湯浅 弘一

学習のポイント ① ハノイの塔 ② 論理的な考え方 ③ 論理の表し方

### 1 ハノイの塔

#### 例題 1

3本の棒のうち、1本に何枚かの円板が通してあります。これらの円板はすべて大きさが異なり、下のものほど大きくなっています。小さい円板の上にそれより大きい円板を乗せないようにして、

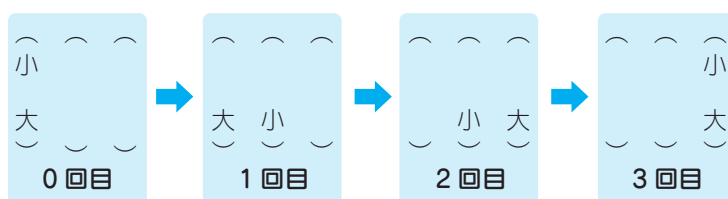
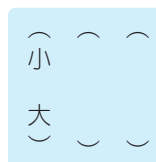


円板を1枚ずつ棒から棒へと移動して、すべての円板を他の1本の棒に移し替えていく。これは、ハノイの塔とよばれるゲームで、「天地創造のときに神がさした64枚の円板をすべて移動し終わると、世の終わりが来る」という作り話とともに有名です。円板の枚数が多くなると、必要な移動回数は途方もなく大きな数になります。64枚の場合には、なんと8446744073709551615回です。仮に1秒間に1枚ずつ絶え間なく円板を移動したとしても、5846億年以上もかかる計算です。これは、現在の宇宙の年齢と考えられている年数の約40倍に当たります。

- (1) 円板が1枚のとき、移動する回数を求めなさい。
- (2) 円板が2枚のとき、移動する回数を求めなさい。

**解答** (1) 円板が1枚のときは、1回移動すればOKです。答えは1回です。

(2) 円盤が2枚のときは、2枚の円板を大と小とすると、はじめ、2枚は下に大、上に小が重なっています。これを右図のように表すことにします。3本の棒をカッコで表しています。この円板の移動を具体的に表すと・・・

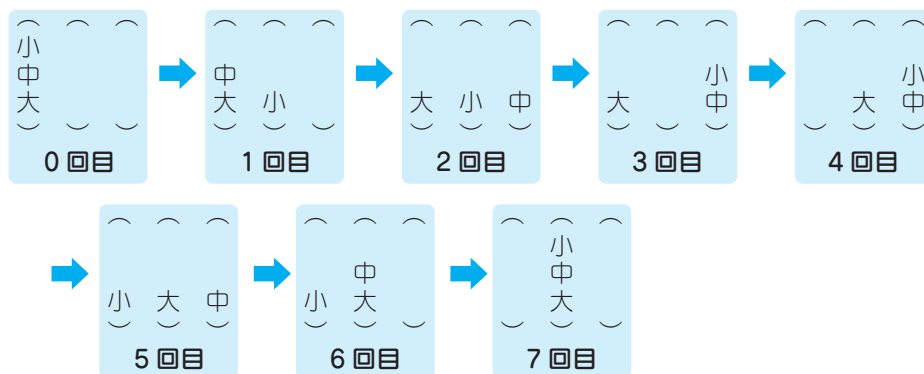


ちょうど、3回目に円板が2枚とも移動完了になります。したがって、答えは3回です。

練習1

〔例題1〕のルールで3枚の円板を移動する最小の回数を求めなさい。

解答 具体的に〔例題1〕と同じように表すと・・・



以上の7回です。

参考

4枚の場合は15回で移動が完了します。

一般に  $n$  枚のときは  $2^n - 1$  (回) で移動終了になります。

## 2 論理的な考え方

例題2

整数  $x, y$  を用いて  $2x + 5y = 7$  となる整数の組  $(x, y)$  は無数にあることを説明しなさい。

解説 これは、直線型の整数問題とされているものです。

$x, y$  が整数であるとき  $2x$  は2の倍数を表し、 $5y$  は5の倍数を表します。

たしかに、 $x=y=1$  は、 $2x + 5y = 7$  を満たします。

これを上手に利用しましょう。

解答  $2x + 5y = 7 \cdots \textcircled{1}$

$2 \times 1 + 5 \times 1 = 7 \cdots \textcircled{2}$

①-②を筆算すると

$$2(x-1) + 5(y-1) = 0$$

になります。右辺が0になったことを利用すると

$$2(x-1) = -5(y-1) \cdots \textcircled{3}$$

$x, y$  は整数なので、③の左辺は2の倍数、右辺は5の倍数です。

つまり、③の式は、2の倍数 = 5の倍数です。

これは何を表しているかというと

$$2 \text{ の倍数} = 5 \text{ の倍数} = 10 \text{ の倍数}$$

ということです。

したがって、③の式は、

$$2(x-1) = -5(y-1) = 10k \quad (k \text{ は整数})$$

と表すことができました。

よって、

$$2(x-1) = 10k \text{ より } x = 5k + 1$$

$$-5(y-1) = 10k \text{ より } y = -2k + 1$$

つまり整数の組  $(x, y) = (5k + 1, -2k + 1)$  と表すことができ、

いろいろな整数  $k$  の値によって整数の組  $(x, y)$  が存在するので、

整数の組  $(x, y)$  は無数にあることが示されました。

練習2

所持金 610 円で 1 個 50 円のみかんと 1 個 80 円のりんごを買う。

所持金をちょうど使い切るとき、みかんとりんごをそれぞれ何個買えばよいか。

解答 みかんと  $x$  個、りんごを  $y$  個買うとすると、所持金 610 円を使い切るためには

$$50x + 80y = 610$$

が成り立つ。(ただし、 $x, y$  は 0 以上の整数)

両辺を 10 で割って

$$5x + 8y = 61 \cdots \textcircled{1}$$

①を満たす整数の組  $(x, y)$  を探すために、

①の係数の大きい  $y$  に 0, 1, 2, 3, ... と順に代入していくと(係数の大きい方から決めると手間が減ります)  $y=2$  のときに  $x$  が整数になることがわかります。このとき、

$$5x + 8 \times 2 = 61 \text{ から } 5x = 61 - 16 = 45$$

これを解いて、 $x=9$  です。

この  $x=9, y=2$  しか答えがないかどうかを確かめます。

そこで、

$$5x + 8y = 61 \cdots \textcircled{1}$$

$$5 \times 9 + 8 \times 2 = 61 \cdots \textcircled{2}$$

① - ②を筆算すると

$$5(x-9) + 8(y-2) = 0$$

つまり  $5(x-9) = -8(y-2) \cdots \textcircled{3}$

$x, y$  は整数なので、③の左辺は5の倍数、右辺は8の倍数です。  
つまり、③の式は、5の倍数 = 8の倍数 = 40の倍数ということです。  
したがって、③の式は、

$$5(x-9) = -8(y-2) = 40k \quad (k \text{ は整数})$$

と表すことができるので

$$5(x-9) = 40k \text{ より } x = 8k + 9$$

$$-8(y-2) = 40k \text{ より } y = -5k + 2$$

つまり整数の組  $(x, y) = (8k + 9, -5k + 2)$  と表すことができました。

さて、 $x, y$  は0以上の整数なので

$$\begin{cases} 8k + 9 \geq 0 \\ -5k + 2 \geq 0 \end{cases} \text{ を解くと, } -\frac{9}{8} \leq k \leq \frac{2}{5}$$

これを満たす整数  $k$  は  $k=0$  のみ。

したがって、整数の組  $(x, y) = (9, 2)$

すなわち、みかん9個、りんご2個を買う。

### 3 論理の表し方

#### 例題3

Aさん, Bさん, Cさん, Dさん, Eさんの5人がいます。

「Aさんより背の高い人が3人いるよ」

「BさんはAくんより高いよ」

「Cさんは1番目でも、3番目でもありません」

「Dさんは2番目か4番目に高いです」

「Eさんは1番高くはありません」

と教えてくれました。さて、Eさんは身長が1番高い人から数えて何番目ですか？

**解答** 次のような表を作ってみましょう。

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い

1つ1つの可能性を埋めていきます。

「Aさんより背の高い人が3人いる」

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
	A			

「BさんはAさんより背が高い」

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
	A	B	B	B

「Cさんは1番でも3番でもない」

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
C	A C	B	B C	B



4番目に高いのはAさんに決まっている

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
C	A	B	B C	B

「Dさんは2番目か4番目に高い」

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
C	A D	B	B C D	B



4番目に高いのはAに決まっているので、Dくんは2番目に高いと決まる

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
C	A	B	D	B

「Eさんは1番高くはない」

この情報の前段階で1番目と3番目だけが決まっていなかったので、Eは3番目にしか入りません。

5番目に高い	4番目に高い	3番目に高い	2番目に高い	1番目に高い
C	A	E	D	B

と決まるので、Eさんは1番高い人から3番目です。

---



---



---



---

練習3

5頭の競走馬 A, B, C, D, E の出走前に、どの馬が1着で入るか4人の仲間で次のような予想を始めた。

春男「AとBはダメだと思う」

夏男「いや、1着にはAかDがくるだろう」

秋男「いや、多分BかCがくると思う」

冬男「AとEは無理だろうな」

結果、この中の2人の予想が当たった。1着に入った馬はどれだったか。

解答 4人の発言の結果を表にしてみましょう。

	A	B	C	D	E
春男			○	○	○
夏男	○			○	
秋男		○	○		
冬男		○	○	○	

2人の予想が当たるので、1着に入った馬はBです。

例題4

正直村とうそつき村に分かれる分かれ道。

そこで、旅人は「正直村へはどちらの道を行けばよいか」を聞くことにしました。

正直村の人に聞けば正直に答え、うそつき村の人に聞けば必ずうそをつくとしめます。

いまちょうど、この分かれ道に村の人がやってきました。どちらの村の人かはわかりません。なんとか1回の質問で正直村への道を選ぶには、どんな質問をすればよいでしょうか。

解答 いろいろな答えが考えられますが、例えば・・・

“あなたはどこから来ましたか？”が考えられます。

この質問に、正直村の人は自分の村の方向をさし、

うそつき村の人はうそをつくために、正直村の方向をさすからです。