第12回

余事象の確率

講師
湯浅 弘一

学習のポイント ① 余事象 ② 余事象の確率 ③ 余事象を使う・使わない

1 余事象

例えば，

{1，2，3，4，5，6，7，8，9}の中から奇数以外を選んでください。

と問われたら，奇数は{1，3，5，7，9}となり，それ以外ですから{2，4，6，8}です。

簡単言えば、偶数ですね。

今度は

{1，2，3，4，5，6，7，8，9}の中から３で割り切れない数を選んでください！

と問われたら，おそらく、３の倍数を先に考えると思います。

つまり３の倍数{3，6，9}以外ですから{1，2，4，5，7，8}です。

この“〇〇以外・・・”を余事象といいます。

数学的な言い回しでいうと・・・

> 事象 A に対して，A が起こらないという事象を A の余事象といい、$\overline{A}$ と表します。

先ほどの問題では

全体集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ に対して

３の倍数の事象 $A=\{3, 6, 9\}$ とすれば

３の倍数ではない事象 $\overline{A}=\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ です。

〔注〕以前，補集合 $\overline{A}$ について学んだのを覚えていますか？

基本的には同じなのですが，考えているフィールドで呼び名が変わります。

集合を考えている際は補集合といい（＃２参照），確率を考える際には余事象といいます。

まだこの時点では場合の数なので，どちらかと言うと補集合ですが，事象という言葉を使うことは間違いではありません。

例題 1

1 個のさいころを投げる試行で 3 の倍数の目が出る事象を A とするとき，
$\overline{A}$ の要素を書き並べなさい。

解答　さいころの目は 1 から 6。
そのうち $A=\{3,\ 6\}$ ですから，$\overline{A}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ です。

練習 1

1 個のさいころを投げる試行で 5 の倍数の目が出る事象を A とするとき
$\overline{A}$ の要素を書き並べなさい。

解答　$A=\{5\}$ ですから，$\overline{A}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ です。

2 余事象の確率

コインを投げて表が出る確率は，表が出るか裏が出るかの 2 通りのうちの 1 通りですから $\frac{1}{2}$ です。
ということは，裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ です。
つまり，起こりうる確率を全部たすと

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=100\,(\%)$$

これをサイコロで考えてみましょう。下の表を見ると，サイコロ 1 個を投げたときの確率は

出る目	1	2	3	4	5	6
確　率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

これらの確率の合計は $\frac{1}{6}\times 6=1=100\,(\%)$ です。

起こりうる確率の合計は必ず $1=100\%$ になることに注意すると・・・

余事象の確率

ある事象 A が起こる確率を $P(A)$ とすると，事象 A が起こらない確率 $P(\overline{A})=1-P(A)$ となります。

例題２

あたりが 2 本，ハズレが 3 本の合計入っている 5 本のくじの中から 1 本ずつ 2 回くじを引くとする。ただし，引いたくじは元に戻さないとする。このとき，少なくとも 1 回はあたりが出る確率を求めなさい。

解説　＜解答１＞

引いたくじは元に戻さないで，1 本ずつ 2 回くじを引いたとき，少なくとも 1 回はあたりが出るとは，

（あ）1 回目（あたり）、2 回目（あたり）

（い）1 回目（あたり）、2 回目（ハズレ）

（う）1 回目（ハズレ）、2 回目（あたり）

この３つの場面が考えられます。

それぞれは同時に起こらないので，（あ）（い）（う）の確率の和を求めます。

（あ）の起こる確率は $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$

（い）の起こる確率は $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$

（う）の起こる確率は $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

よって（あ）（い）（う）の確率の和 $\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$

と求めることができます。

＜解答２＞　オススメ

上の＜解答１＞を見ると，以下の表から・・・

	1 回目あたり	1 回目ハズレ
2 回目あたり	（あ）	（う）
2 回目ハズレ	（い）	（え）

（え）以外の場所の確率を問われていることがわかります。

つまり，（え）の余事象です。

求めたい「少なくとも１回はあたりが出る事象」を A とすると，

余事象 $\overline{A}$ は（え）の 1 回目，2 回目共にハズレです。この確率は

$$P(\overline{A}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

よって余事象の確率の式 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ を変形して，$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ を用いて

$P(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$　と求めることができます。

練習２

あたりが3本，ハズレが4本の合計入っている7本のくじの中から1本ずつ2回くじを引くとする。ただし，引いたくじは元に戻さないとする。このとき，少なくとも1回はあたりが出る確率を求めなさい。

解答　求める事象を A とすると、余事象 $\overline{A}$ は2回ともハズレる事象。

この確率 $P(\overline{A}) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{7}$

よって求める確率 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$

例題３

外から見えない箱の中にあたりくじが3本，ハズレくじが7本の合計10本入っている。
この箱の中から2本のくじを同時に引くとき，少なくとも1本があたる確率を求めなさい。

方針　起こりうるすべての場合の数から考えてみましょう。
10本のくじの中から2本のくじを同時に引くので，組合せの公式で考えます。
順列ではなく組合せの公式で考える理由は1本ずつ2回取ってはいないからです。
（1本ずつ2回取ることと）≒（同時に2本引く）
なのです。なぜなら，もともと行動が異なるからです。
直感的（結果的でもありますが・・・）には同じ確率になりますが，きちんと分けておきましょう。
さらに・・・
“少なくとも1本のあたりを引く”とは1本以上あたりを引くことです。
2本引くときに1本以上のあたりとは
（1）1本だけあたり　または　（2）2本ともあたり
のことです。
すると，この余事象は0本のあたりくじ，つまり2本ともハズレくじを引くことです。
この考え方の方が（1）（2）の2通りではなく，1通りだけ考えればよいので時短になりそうですね！
余事象は使い慣れると時短になるのです！

解答　起こりうるすべての場合の数は 10 本の中から 2 本を引く場合の数なので

$$ {}_{10}\mathrm{C}_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45\,(\text{通り}) $$

そのうち，求める 2 本のくじを同時に引くとき，少なくとも 1 本があたる事象を A とすると
余事象 $\overline{A}$ は 2 本ともハズレくじを引くことです。
この場合の数は，ハズレ 7 本のくじの中から 2 本を引く場合の数なので，

$$ {}_{7}\mathrm{C}_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21\,(\text{通り}) $$

ですから余事象の確率 $P(\overline{A}) = \dfrac{21}{45} = \dfrac{7}{15}$

求める確率 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15}$

と求めることができます。

練習３

外から見えない箱の中にあたりくじが 4 本，ハズレくじが 8 本の合計 12 本入っている。
この箱の中から 3 本のくじを同時に引くとき，少なくとも 1 本があたる確率を求めなさい。

解答　起こりうるすべての場合の数は 12 本の中から 3 本を引く場合の数なので

$$ {}_{12}\mathrm{C}_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220\,(\text{通り}) $$

そのうち，求める 3 本のくじを同時に引くとき，少なくとも 1 本があたる事象を A とすると
余事象 $\overline{A}$ は 3 本ともハズレくじを引くことです。
この場合の数は，ハズレ 8 本のくじの中から 3 本を引く場合の数なので，

$$ {}_{8}\mathrm{C}_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56\,(\text{通り}) $$

ですから余事象の確率 $P(A) = \dfrac{56}{220} = \dfrac{14}{55}$

求める確率 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{14}{55} = \dfrac{41}{55}$

と求めることができます。

③ 余事象を使う・使わない

練習３の問題を余事象を使わないで考えると，3 本引いて少なくとも 1 本当たるとき，
つまり，1 本当たる、2 本当たる、3 本当たるの３つの場面を考えなくてはいけません。
このように考える場面が多くなるかも・・・と思ったときに，余事象を考えるとよさそうです。

例題４

偶然に集まった 3 人の中に同じお誕生日の人が少なくとも 1 組いる確率は？
ただし，この 3 人は 2 月 29 日生まれではないとする。

方針　“3 人の中に同じ誕生日の人が少なくとも 1 組いる”場面は 1 組以上なので，
2 人が同じ誕生日で 1 人異なるか　または　3 人とも同じ誕生日であるかの２場面があります。
しかし，余事象を考えると，3 人とも異なる誕生日で求めることができます。

解答　例えば，3 人を A さん B さん C さんとします。
起こりうる（考えられる）3 人の誕生日の日にちのすべての組は
A さんが 365 日，B さんも 365 日，C さんも 365 日あるので，
$365 \times 365 \times 365 = 365^3$（通り）
あります。
そのうち，求める余事象「3 人とも誕生日が異なる日にちの組」は，
A さんの誕生日が 365 通り考えられるのに対して，B さんは A さん以外の日にちなので，
$365 - 1 = 364$（通り）
C さんは A，B さん以外の日にちなので，
$365 - 2 = 363$（通り）
となるので，この 3 人の誕生日がすべて異なる組は
$365 \times 364 \times 363$（通り）
です。
よって，求める確率は

$$1 - \frac{365 \times 364 \times 363}{365^3} = 1 - \frac{364 \times 363}{365^2} = \frac{133225 - 132132}{133225} = \frac{1093}{133225}$$

〔参考〕この $\dfrac{1093}{133225} = 0.008204\cdots$ となり，およそ 0.8% です。

練習4

40人クラスの中に同じお誕生日の人が少なくとも1組いる確率は？ただし，この40人は2月29日生まれではないとする。（計算機を使わないと無理ですよ！）

解答　起こりうる（考えられる）40人の誕生日の日にちのすべての組は

どの人も365通りの可能性があるので

$365 \times 365 \times \cdot\cdot\cdot \times 365 = 365^{40}$（通り）

あります。

そのうち，求める余事象「40人とも誕生日が異なる日にち」の組は，

1人目の誕生日が365通り考えられるのに対して，2人目は1人目以外の日にちなので，

$365 - 1 = 364$（通り）

3人目は1人目、2人目以外の日にちなので、$365 - 2 = 363$通り，これを40人目まで繰り返しますから、

この40人のお誕生日がすべて異なる組は

$365 \times 364 \times 363 \times \cdot\cdot\cdot \times 326$（通り）

です。

よって，求める確率は

$$1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdot\cdot\cdot \times 326}{365^{40}} = 1 - \frac{364 \times 363 \times \cdot\cdot\cdot \times 326}{365^{39}} = 0.89123\cdot\cdot\cdot$$

およそ89％です！