第32回　第5章　微分と積分「微分係数と導関数」

平均変化率と微分係数

講師
水谷 信也

関数$y=f(x)$において，xの変化量に対するyの変化量の割合について学びます。
また，xの変化量を限りなく0に近づけたときの平均変化率について考えます。

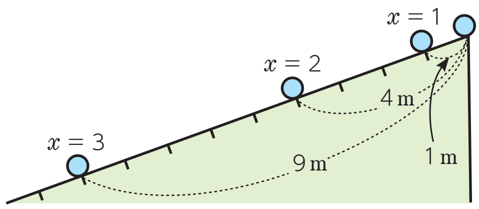
学習のポイント

① 平均変化率
② 極限値
③ 微分係数

$y=2x+1$，$y=x^2$のように，yがxの関数であることを$y=f(x)$のように表します。
関数$y=f(x)$において，$f(x)$の式に$x=a$を代入して得られるyの値を$f(a)$で表します。

ステップ1　平均変化率

斜面を転がる球の速さは，時刻とともに変化します。
ある斜面では，球が転がり始めてからの時間x秒と，転がった距離y mとの間に$y=x^2$の関係が成り立っています。



この運動で，球が転がり始めて
1秒後から2秒後までの平均の速さは

$$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3\ (\mathrm{m/s})$$

2秒後から3秒後までの平均の速さは

$$\frac{3^2-2^2}{3-2}=5\ (\mathrm{m/s})$$

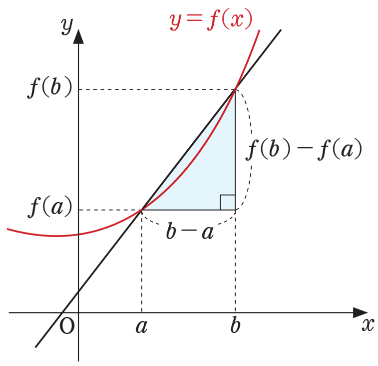
となります。

平均の速さ $=\dfrac{距離}{時間}$
3(m/s)は秒速3mを表している。

一般に，関数$y=f(x)$において，xの値がaからbまで変化するとき
　xの変化量は　$b-a$
　yの変化量は　$f(b)-f(a)$
となります。
このとき，

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，xの値がaからbまで変化するときの，関数$f(x)$の平均変化率といいます。



この値は，曲線$y=f(x)$上の2点$(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$を通る直線の傾きに等しくなります。

ステップ２　極限値

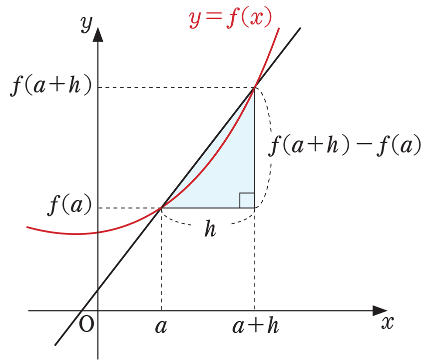
関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するとき

x の変化量は $(a+h)-a=h$

y の変化量は $f(a+h)-f(a)$

となるので，平均変化率は次のようになります。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



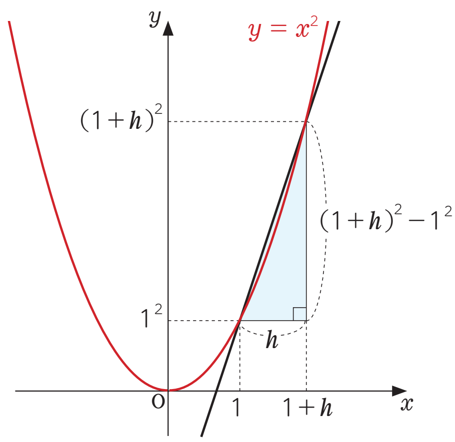
例　関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が１から $1+h$ まで変化するときの平均変化率は・・・

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

$$=\frac{h(2+h)}{h}$$

$$=2+h$$



例で，h の値を 0.1，0.01，0.001，・・・ のように限りなく０に近づけるとき，

$2+h$ の値は次のようになります。

$h=0.1$　　のとき　$2+h=2.1$

$h=0.01$　 のとき　$2+h=2.01$

$h=0.001$ のとき　$2+h=2.001$

⋮

$h=-0.1$　 のとき　$2+h=1.9$

$h=-0.01$ のとき　$2+h=1.99$

⋮

h が負の値をとりながら限りなく０に近づくときも，$2+h$ の値は限りなく２に近づく。

このことから，h が限りなく０に近づくとき，

$2+h$ の値は限りなく２に近づくことがわかります。

この値「２」を，

h が限りなく０に近づくときの $2+h$ の極限値（きょくげんち）といいます。

このことを記号 lim を用いて次のように書きます。

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

← 極限値２は斜面で，球が転がり始めて１秒後の瞬間の速さを表している

← lim は limit の略でリミットと読む

例　(1) $\lim_{h\to 0}(5+h)=5$　　(2) $\lim_{h\to 0}(6+5h+h^2)=6$

ステップ３　微分係数

関数 $f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

です。この式で，h を限りなく０に近づけたときの極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数（びぶんけいすう）といい，$f'(a)$ で表します。

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例　関数 $f(x)=x^2$ において，微分係数 $f'(2)$ を求めてみましょう。

解答

$$\begin{aligned} f(2+h)-f(2) &= (2+h)^2-2^2 \\ &= 4+4h+h^2-4 \\ &= 4h+h^2 \\ &= h(4+h) \end{aligned}$$

よって，微分係数 $f'(2)$ は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4+h) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Let's try!　ホームページ独自問題・実力確認！

1　関数 $f(x)=2x^2$ において，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

（1）　１から３まで　　（2）　３から４まで　　（3）　−２から６まで

2　次の極限値を求めなさい。

（1）$\lim_{h\to 0}(4+h)$　　（2）$\lim_{h\to 0}(3+8h+h^2)$

3　関数 $f(x)=2x^2$ において，次の微分係数を求めなさい。

（1）　$f'(2)$　　（2）　$f'(-3)$

[4] 関数 $f(x)=3x^2-2x+3$ について，$x=-2$，$x=1$ における微分係数をそれぞれ求めなさい。

解答

[1] (1) 8　(2) 14　(3) 8

[2] (1) 4　(2) 3

[3] (1)

$$f(2+h)-f(2)=2\times(2+h)^2-2\times2^2$$
$$=2\times(4+4h+h^2)-2\times2^2$$
$$=8+8h+2h^2-8$$
$$=8h+2h^2$$
$$=2h(4+h)$$

よって，微分係数$f'(2)$は

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h(4+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}2(4+h)$$
$$=8$$

(2)

$$f(-3+h)-f(-3)=2\times(-3+h)^2-2\times(-3)^2$$
$$=2\times(9-6h+h^2)-2\times(-3)^2$$
$$=18-12h+2h^2-18$$
$$=-12h+2h^2$$
$$=2h(-6+h)$$

よって，微分係数 $f'(-3)$は

$$f'(-3)=\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h(-6+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}2(-6+h)$$
$$=-12$$

[4] $f(x)$を微分すると，$f'(x)=6x-2$

よって，　$f'(-2)=6\times(-2)-2=-14$

$f'(1)=6\times1-2=4$