第24回　第3章　三角関数「加法定理」

弧度法

講師
水谷 信也

弧度法とよばれる角の表し方について学ぶ。

学習のポイント
① 弧度法の考え方
② おうぎ形の弧の長さと面積
③ 弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積の求め方

ステップ1 弧度法の考え方

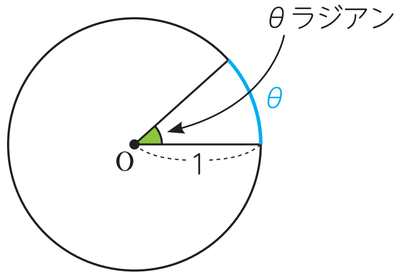
● 度数法（60分法）

角の大きさを表すのに，円の一周を360°とする方法を度数法または60分法といいます。これは，古代バビロニアでは，1年を360日としていたことが，その起源だといわれています。また，360という数は約数が多く扱いやすいという特徴があります。

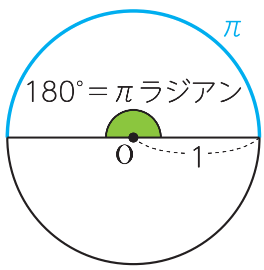
●弧度法

例えば，半径1の円の円周の長さは2π，半径1の半円の孤の長さは円周の長さの半分なのでπとなります。さらに，半径1で中心角が90°の扇型の孤の長さは，先ほどの半円の孤の長さの半分なので，$\dfrac{\pi}{2}$です。このように，円の半径や扇型の孤の半径が等しければ，それらの中心角の大きさと孤の長さは互いに比例します。この性質を使って，角度を表す方法が弧度法です。

弧度法では，半径が1の円で，長さθの孤に対する中心角の大きさをθラジアンと表します。
半径1の半円の孤の長さはπなので，
その中心角はπラジアンです。



半径1の円の円周の長さ ⟹ 2π
1周の角度，360°を弧度法で表すと？⟹ 2πラジアン
では，180°は？ ⟹ πラジアン



半径１の円の中心角 90° を弧度法で表すと？ ⟹ 180° が π ラジアンなので，$\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン

弧度法

180° ＝ π ラジアン

180° ＝ π ラジアンの両辺を 180 で割ると，

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン}$$

180° ＝ π ラジアンの両辺を π で割ると，

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq \frac{180^\circ}{3.14} \fallingdotseq 57.3^\circ$$

● 度数法で表された角を弧度法で表してみよう

$$30^\circ = 30 \times 1^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン} = \frac{\pi}{6} \text{ ラジアン}$$

$$330^\circ = 330 \times 1^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン} = \frac{11}{6}\pi \text{ ラジアン}$$

● 弧度法で表された角を度数法で表してみよう

$$\frac{\pi}{6} \text{ ラジアン} = \frac{1}{6} \times \pi \text{ ラジアン} = \frac{1}{6} \times 180^\circ = 30^\circ$$ ← π ラジアン＝ 180°

$$\frac{5}{4}\pi \text{ ラジアン} = \frac{5}{4} \times 180^\circ = 225^\circ$$

弧度法ではふつう，単位のラジアンを省略するので覚えておきましょう！

例

（1）$\sin\dfrac{7}{6}\pi = \sin 210^\circ = \sin(30^\circ + 180^\circ) = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$ ← $\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$

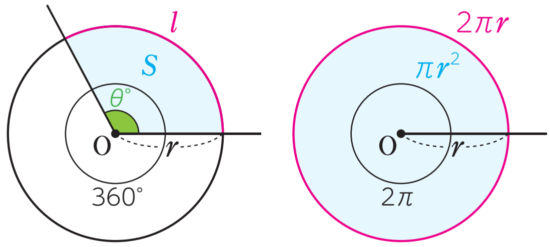
（2）$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ ← $\cos(-\theta) = \cos\theta$

ステップ2　おうぎ形の弧の長さと面積

復習をかねて度数法で，おうぎ形の弧の長さと面積を求めてみましょう。
半径が r，中心角が θ° のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とすると，
半径が r の円では，円周の長さは $2\pi r$，円の面積は πr^2 なので

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

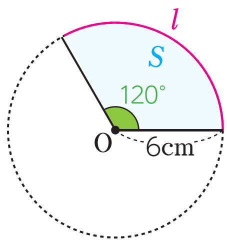


例

半径 6cm，中心角 120° のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = 2\pi \times 6 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 4\pi \text{ (cm)}$$

$$S = \pi \times 6^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



半径 r，中心角 θ のおうぎ形の弧の長さを l，面積を S とする。
θ が弧度法で表されているとき，これらの間に成り立つ関係を調べてみましょう。
弧の長さの比と中心角の比は等しいから，

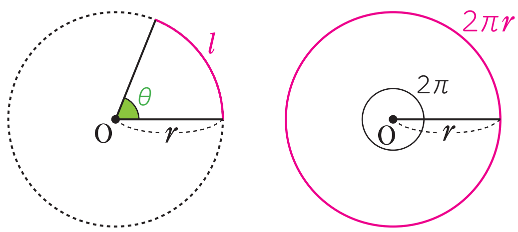
$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$$

よって，

$$2\pi l = 2\pi r\theta$$

したがって，

$$l = r\theta$$



面積の比と中心角の比は等しいから

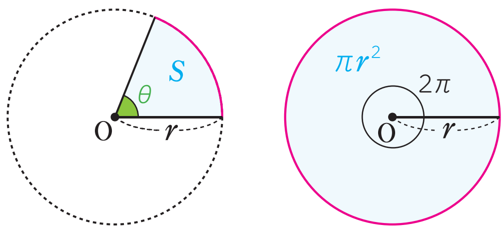
$$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

よって，

$$2\pi S = \pi r^2\theta$$

したがって，

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$



弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積

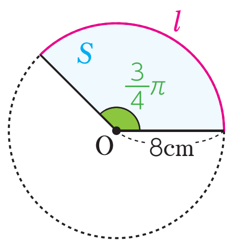
半径 r，中心角 θ のおうぎ形の弧の長さ l と面積 S は

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$

ステップ３　弧度法による おうぎ形の弧の長さと面積の求め方

例

半径 8cm，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ のおうぎ形の，



弧の長さ l は　$l = 8 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$ (cm)

面積 S は　$S = \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4}\pi = 24\pi$ (cm^2)

おうぎ形の面積を三角形の面積を求めるイメージで求めると，

弧の長さ l を底辺に，半径 r を高さに見立てて，　$S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 8 = 24\pi$ (cm^2)

ホームページ独自問題・実力確認！

$\boxed{1}$ 32° を弧度法で表しなさい。

$\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$ の値を求めなさい。

$\boxed{3}$ 半径 4cm，中心角 $\frac{7}{4}\pi$ のおうぎ形の弧の長さ l と面積 S を求めなさい。

解答

$\boxed{1}$ $32° = 32 \times 1° = 32 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8}{45}\pi$

$\boxed{2}$ $\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right) = \sin(-225°) = -\sin 225° = -\sin(45°+180°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{3}$ $l = 4 \times \frac{7}{4}\pi = 7\pi$ (cm)，$S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{7}{4}\pi = 14\pi$ (cm^2)