第84回　第5章　微分と積分「積分」

面積 (2)
～ 面積を求める工夫 ～

講師
川﨑 宣昭

曲線や直線で囲まれた図形の面積を，定積分を用いて求めます。今回は，面積を求めるために必要な工夫について学びます。

学習のポイント

① $f(x) \leqq 0$ となる場合の面積
② 2曲線間の面積を定積分で表す方法
③ 2曲線間の面積の計算

1 $f(x) \leqq 0$ となる場合の面積

下の図1のように，$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \leqq 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および2直線 $x = a$，$x = b$ によって囲まれた部分の面積 S を求める方法を考えます。
曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = -f(x)$ は x 軸について対称です。
したがって，図1のグレーの部分の面積は，図2のグレーの部分の面積に等しくなります。

図2のグレーの部分の面積は　$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx$　ですから，

図1のグレーの部分の面積も　$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx$　の定積分で求められます。

図1

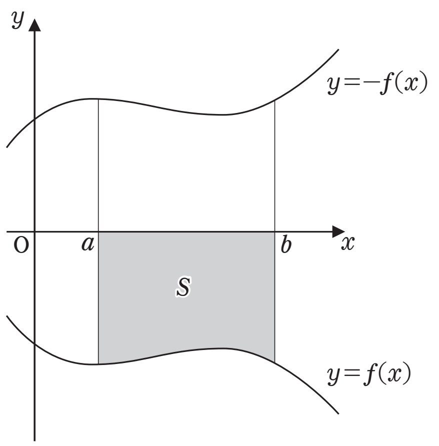
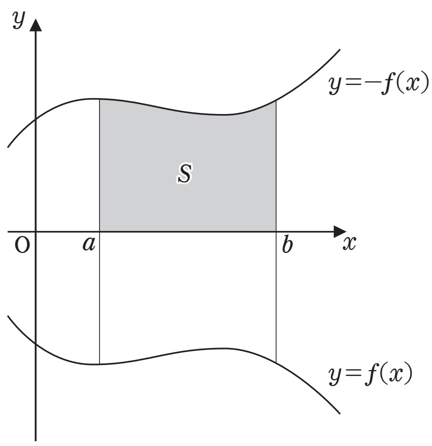
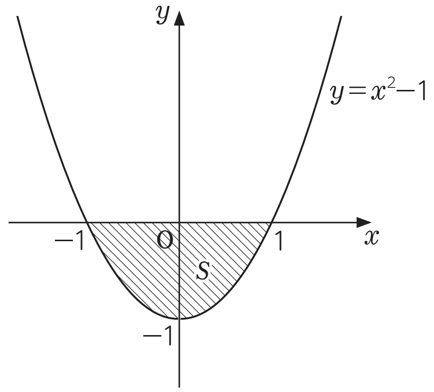


図2



例　曲線 $y = x^2 - 1$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

解答　曲線 $y = x^2 - 1$ と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2 - 1 = 0$ の解であるから，
$(x+1)(x-1) = 0$ より，$x = -1,\ 1$
$-1 \leqq x \leqq 1$ で $x^2 - 1 \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は，



$$S = \int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}dx = \int_{-1}^{1}(-x^2+1)\}dx$$

$$= -\int_{-1}^{1}x^2dx + \int_{-1}^{1}dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1}$$

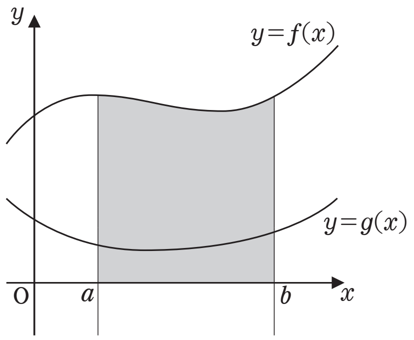
$$= -\frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3}\{1^3-(-1)^3\} + \{1-(-1)\}$$

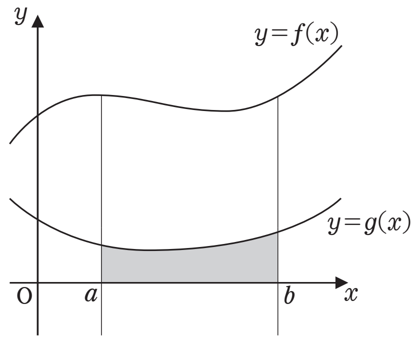
$$= -\frac{1}{3}(1+1) + (1+1)$$

$$= \frac{4}{3}\quad (答)$$

2　2曲線間の面積を定積分で表す方法



上のグレーの部分の面積は，　$S = \int_a^b f(x)\,dx$

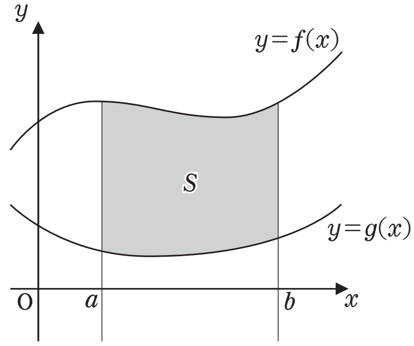


上のグレーの部分の面積は，$S = \int_a^b g(x)\,dx$

したがって，
$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq g(x)$ のとき，
2直線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と
2直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b\{f(x) - g(x)\}\,dx$$

で求められます。

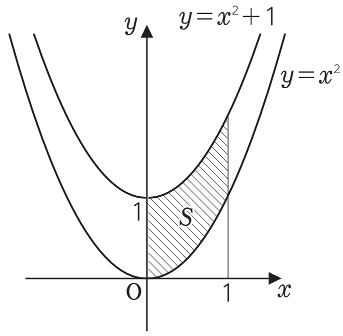


3　2曲線間の面積の計算

例　2曲線 $y = x^2 + 1$，$y = x^2$ と2直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

解答　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $x^2 + 1 \geqq x^2$ であるから，

$$S = \int_0^1 \{(x^2 + 1) - x^2\}\,dx$$
$$= \int_0^1 dx$$
$$= [x]_0^1$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1 \quad \text{(答)}$$



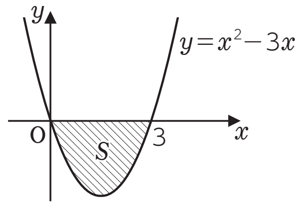
問1　次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(1) $y = x^2 - 3x$　　(2) $y = x^2 + x - 6$

問2　2曲線 $y = 2x^2 + 3$，$y = x^2$ と2直線 $x = 1$，$x = 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい。

問 1・解答

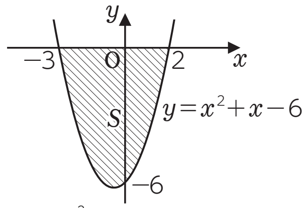
(1) 曲線 $y=x^2-3x$ と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2-3x=0$ の解であるから，
$x(x-3)=0$ より，　$x=0,\ 3$



$0 \leqq x \leqq 3$ で $x^2-3x \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は

$$S=\int_0^3\{-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$
$$=-\int_0^3 x^2\,dx+3\int_0^3 x\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3+\frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}(3^3-0^3)+\frac{3}{2}(3^2-0^2)$$
$$=-9+\frac{27}{2}$$
$$=\frac{9}{2}$$

(2) 曲線 $y=x^2+x-6$ と x 軸の交点の x 座標は，
$x^2+x-6=0$ の解であるから，
$(x+3)(x-2)$ $x=0$ より



$-3 \leqq x \leqq 2$ で $x^2+x-6 \leqq 0$ であるから，
求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^{2}\{-(x^2+x-6)\}dx$$
$$=\int_{-3}^{2}(-x^2-x+6)dx$$
$$=-\int_{-3}^{2}x^2\,dx-\int_{-3}^{2}x\,dx+6\int_{-3}^{2}dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{2}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2}+6\left[x\right]_{-3}^{2}$$
$$=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-3}^{2}-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-3}^{2}+6\left[x\right]_{-3}^{2}$$
$$=-\frac{1}{3}\{2^3-(-3)^3\}-\frac{1}{2}\{2^2-(-3)^2\}+6\{2-(-3)\}$$
$$=-\frac{1}{3}(8+27)-\frac{1}{2}(4-9)+6(2+3)$$
$$=-\frac{35}{3}+\frac{5}{2}+30=\frac{-70+15+180}{6}=\frac{125}{6}$$

問 2・解答

$1 \leqq x \leqq 2$ で $2x^2+3 \geqq x^2$ であるから，

$$\int_1^2\{(2x^2+3)-x^2\}dx$$
$$=\int_1^2(x^2+3)dx$$
$$=\int_1^2 x^2\,dx+3\int_1^2 x\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2+3\left[x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2+3\left[x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}(2^3-1^3)+3(2-1)$$
$$=\frac{7}{3}+3=\frac{16}{3}$$