定積分 (1)

～ 定積分の意味 ～

講師
川﨑 宣昭

関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの変化量 $F(b) - F(a)$ について学びます。
今回は主に，定積分の意味を学びます。

学習のポイント
① 不定積分から定積分へ
② 定積分の下端と上端
③ 簡単な定積分の計算

1 不定積分から定積分へ

関数 $f(x) = 3x^2$ に対し，$F(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + C$ とする。
積分定数 C はどのような値でもよいのですが，

・$C = 0$ とすると，
$F(x) = x^3$ より，$F(2) - F(1) = 2^3 - 1^3 = 7$

・$C = 2$ とすると，
$F(x) = x^3 + 2$ より，
$$\begin{aligned} F(2) - F(1) &= (2^3 + 2) - (1^3 + 2) \\ &= (8 + 2) - (1 + 2) \\ &= 10 - 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

・$C = -1$ とすると，
$F(x) = x^3 - 1$ より，
$$\begin{aligned} F(2) - F(1) &= (2^3 - 1) - (1^3 - 1) \\ &= (8 - 1) - (1 - 1) \\ &= 7 - 0 \\ &= 7 \end{aligned}$$

したがって，どのような定数 C の値に対しても，
$$F(2) - F(1) = (2^3 + C) - (1^3 + C) = (8 + C) - (1 + C) = 8 + C - 1 - C = 7$$
このように，値が 7 と決まります。
この値「7」は，$2^3 - 1^3$ の計算結果です。

したがって，関数 $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とするとき，
$F(b) - F(a)$ の値は積分定数 C に無関係です。

$$\int f(x)\,dx = \boxed{F(x)} + C$$

この式の部分で値が決まってきます。

この $F(b) - F(a)$ を，$f(x)$ の a から b までの定積分（ていせきぶん）といいます。

2 定積分の下端と上端

$f(x)$ の a から b までの定積分は，$\int_a^b f(x)\,dx$ で表します。

このとき，a を下端（かたん），b を上端（じょうたん）といい，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

のように書きます。

定積分の公式

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

3 簡単な定積分の計算

例　次の定積分を求めてみよう。

(1) $\int_1^4 2x\,dx$　　(2) $\int_{-1}^1 x^2\,dx$

解答　(1) $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2 \times \dfrac{x^2}{2} + C = x^2 + C$

したがって，

$$\int_1^4 2x\,dx = \Big[x^2\Big]_1^4 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15 \quad \text{(答)}$$

(2) $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + C$

したがって，

$$\int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{(答)}$$

この計算は，次のように計算しても構いません。

$$\int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\{1^3 - (-1)^3\} = \frac{1}{3}\{1 - (-1)\}$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 1) = \frac{2}{3}$$

問 1　次の定積分を求めてみよう。

(1) $\int_0^3 4x\,dx$　　(2) $\int_1^4 3\,dx$　　(3) $\int_{-2}^1 2x^2\,dx$

問 1・解答

(1) $\int 4x\,dx = 4\int x\,dx = 4\times\dfrac{x^2}{2}+C = 2x^2+C$　であるから,

$\int_0^3 4x\,dx = \left[2x^2\right]_0^3 = 2\times 3^2 - 2\times 0^2 = 18 - 0 = 18$

※ $\int_0^3 4x\,dx = \left[2x^2\right]_0^3 = 2\left[x^2\right]_0^3 = 2(3^2-0^2) = 2\times 9 = 18$　と計算してもよい。

(2) $\int 3\,dx = 3\int dx = 3x+C$　であるから,

$\int_1^4 3\,dx = \left[3x\right]_1^4 = 3\times 4 - 3\times 1 = 12 - 3 = 9$

※ $\int_1^4 3\,dx = \left[3x\right]_1^4 = 3\left[x\right]_1^4 = 3(4-1) = 3\times 3 = 9$　と計算してもよい。

(3) $\int 2x^2\,dx = 2\int x^2\,dx = 2\times\dfrac{x^3}{3}+C = \dfrac{2}{3}x^3+C$　であるから,

$\int_{-2}^{1} 2x^2\,dx = \left[\dfrac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{1} = \dfrac{2}{3}\times 1^3 - \dfrac{2}{3}\times(-2)^3 = \dfrac{2}{3} - \left(-\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{16}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$

※ $\int_{-2}^{1} 2x^2\,dx = \left[\dfrac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{1} = \dfrac{2}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{1} = \dfrac{2}{3}\{1^3-(-2)^3\} = \dfrac{2}{3}\{1-(-8)\} = \dfrac{2}{3}\times 9 = 6$

と計算してもよい。