第61回　第4章　指数関数と対数関数「対数関数」

対数関数とそのグラフ (1)

～ $y = \log_2 x$ のグラフ～

講師
矢作 裕滋

「対数関数とそのグラフ」では，$y = \log_2 x$ や $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のような関数のグラフについて学びます。さらに，この関数のグラフの性質を利用して対数の大小を調べます。

学習のポイント

① 対数関数とは何か？

② $y = \log_2 x$ のグラフ

③ $y = \log_a x\ (a > 1)$ のグラフの特徴

1 対数関数とは何か？

x を正の数，a を1以外の正の数とするとき，

$y = \log_a x$

で表される関数を，a を底（てい）とする x の対数関数（たいすうかんすう）といいます。

2 $y = \log_2 x$ のグラフ

$y = \log_2 x$ のグラフをかくために，
$x > 0$ の範囲での x の値に対応する y の値を求めてみましょう。

まず，x にいろいろな値を与えて，y の値を計算してみます。

$x = \frac{1}{8} \longrightarrow y = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3$

$x = \frac{1}{4} \longrightarrow y = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2$

$x = \frac{1}{2} \longrightarrow y = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -\log_2 2 = -1$

$x = 1 \longrightarrow y = \log_2 1 = 0$

$x = 2 \longrightarrow y = \log_2 2 = 1$

$x = 4 \longrightarrow y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2$

$x = 8 \longrightarrow y = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3$

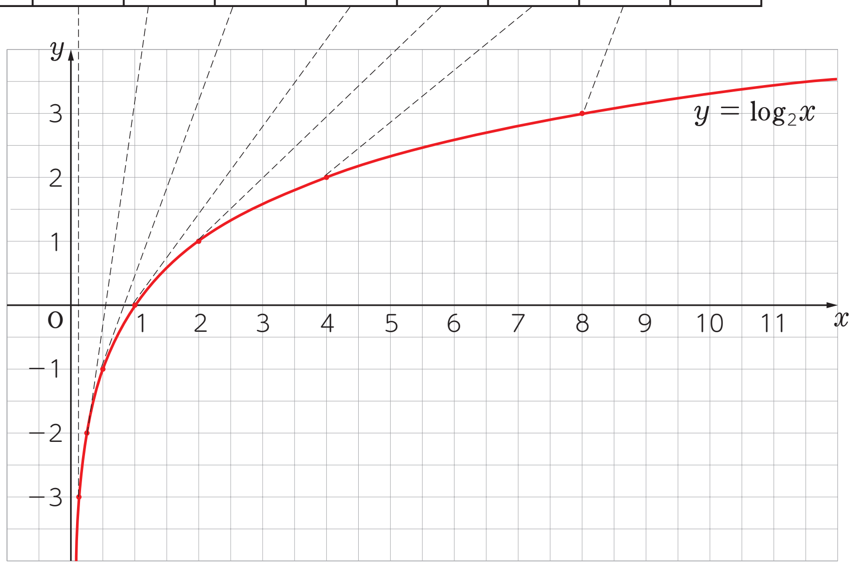
$x = \sqrt{2}$，$4\sqrt{2}$ について，
$y = \log_2 x$ の値を求めると…

$y = \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$y = \log_2 4\sqrt{2}$
$= \log_2 4 + \log_2 \sqrt{2}$
$= 2 + \frac{1}{2}$
$= \frac{5}{2}$

これを元にして表をつくると，次頁のようになります。

x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
$y=\log_2 x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$



3 $y=\log_a x\ (a>1)$ のグラフの特徴

まず，底が２の対数関数のグラフの特徴を確認しましょう。

$y=\log_2 x$ のグラフ

（１）２点 (1，0)，(2，1) を通る
（２）$x>0$ の範囲にある（y 軸の右側にある）
（３）y 軸を漸近線とする
（４）x の値が増加すると y の値も増加する
　　x の値が大きくなるにつれて y の増加のしかたは緩やかになる

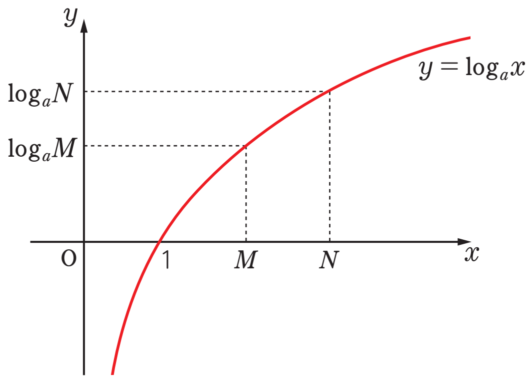
底の値が1よりも大きい対数関数のグラフの特徴は，次のようにまとめられます。

$y=\log_a x$ $(a>1)$ のグラフ

（1）2点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る
（2）$x>0$ の範囲にある（y 軸の右側にある）
（3）y 軸を漸近線とする
（4）x の値が増加すると y の値も増加する

【$a>1$ のとき】

$0<M<N \iff \log_a M<\log_a N$



対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフは，指数関数 $y=2^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称です。