第54回　第4章　指数関数と対数関数「指数関数」

累乗根 (2)
～ 分数の指数 ～

講師
川﨑 宣昭

n 乗すると a になる数について学びます。
また，整数全体の範囲で考えた指数を，
分数の範囲に広げる考え方を学びます。

学習のポイント
① 分数の指数とは？
② 指数が分数や整数のときの指数法則
③ 指数法則を用いた計算

1 分数の指数とは？

m，n が整数の場合に成り立っていた指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ について，
m，n が分数の場合でも成り立っているとしてみましょう。

$m = \dfrac{1}{3}$，$n = 3$ とすると，$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$ ➡ $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ と考えることができる。

$m = \dfrac{1}{2}$，$n = 2$ とすると，$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times 2} = a^1 = a$ ➡ $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ と考えることができる。

他の場合も同様にして，

$a > 0$ で，n が正の整数のとき，$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

とすると，$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2}$ と考えることができるので，
指数が分数のときは，以下のように定めることができます。

分数の指数

$a > 0$ で，m，n が正の整数のとき，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

分子の m が $\sqrt{\ }$ の中，
分母の n が $\sqrt{\ }$ の左上

例　(1) $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$　　(2) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$
(※平方根の場合，$\sqrt{\ }$ の記号の左上の小さい数「2」は省略します)

(3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^{3\times 2}} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4$

(4) $5^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

2 指数が分数や整数のときの指数法則

分数の指数を前ページのように定めると，指数がどのような分数や整数であっても，
以下の指数法則が成立します。
※累乗根の計算法則に戻して考えると，成立することがわかります。

指数法則

$a>0$，$b>0$ で，p，q が分数や整数のとき
[1] $a^p \times a^q = a^{p+q}$　[2] $a^p \div a^q = a^{p-q}$　[3] $(a^p)^q = a^{pq}$　[4] $(ab)^p = a^p b^p$

例 (1) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$

累乗根の計算 $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{4^5} = \sqrt[3]{4^1 \times 4^5} = \sqrt[3]{4^{1+5}} = \sqrt[3]{4^6} = 4^2 = 16$

(2) $5^{\frac{7}{4}} \div 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$

累乗根の計算 $\sqrt[4]{5^7} \div \sqrt[4]{5^3} = \dfrac{\sqrt[4]{5^7}}{\sqrt[4]{5^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^7}{5^3}} = \sqrt[4]{5^{7-3}} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

(3) $(\sqrt[5]{3^2})^{10} = (3^{\frac{2}{5}})^{10} = 3^{\frac{2}{5}\times 10} = 3^4 = 81$

累乗根の計算 $(\sqrt[5]{3^2})^{10} = \sqrt[5]{(3^2)^{10}} = \sqrt[5]{3^{2\times 10}} = \sqrt[5]{(3^4)^5} = 3^4 = 81$

3 指数法則を用いた計算

例 (1) $\boxed{\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4}}$
$= 3^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{4}{3}}$
$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$
$= 3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}$
$= 3^{\frac{6}{3}}$
$= 3^2$
$= 9$

3$^{○}$の形にそろえる

(2) $\boxed{\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8}}$
$= \sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{2^3}$
$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{3}{6}}$
$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$
$= 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$
$= 2^{\frac{2}{2}}$
$= 2^1$
$= 2$

2$^{○}$の形にそろえる

$\sqrt[n]{a^m}$ は，$a^{\frac{m}{n}}$ の形になおしてから計算する

問 1 次の値を求めなさい。

（1）$7^{\frac{1}{5}}$　（2）$4^{\frac{3}{2}}$　（3）$3^{-\frac{2}{5}}$

問 2 次の値を $a^{\frac{m}{n}}$ の形にしなさい。ただし，$a>0$ とする。

（1）$\sqrt[5]{a}$　（2）$\sqrt[3]{a^4}$　（3）$\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$　（4）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

問 3 次の計算をしなさい。ただし，$a>0$ とする。

（1）$a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{4}}$　（2）$a^{\frac{8}{3}}\div a^{\frac{2}{3}}$　（3）$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

問 4 次の計算をしなさい。

（1）$\sqrt[3]{25}\times\sqrt[6]{25}$　（2）$\sqrt[4]{2^9}\div\sqrt[8]{2^2}$　（3）$\sqrt{27}\times\sqrt[4]{3^2}$　（4）$\sqrt[3]{16}\div\sqrt[6]{4}$

問 1・解答

(1) $7^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{7}$　(2) $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{(2^2)^3}=\sqrt{(2^3)^2}=2^3=8$

(3) $3^{-\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{3^{\frac{2}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{9}}$

問 2・解答

(1) $\sqrt[5]{a}=a^{\frac{1}{5}}$　(2) $\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{4}{3}}$　(3) $\left(\sqrt[4]{a}\right)^5=\sqrt[4]{a^5}=a^{\frac{5}{4}}$　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{-\frac{2}{3}}$

問 3・解答

(1) $a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{4}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}=a^{\frac{8}{4}}=a^2$　(2) $a^{\frac{8}{3}}\div a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{8}{3}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$

(3) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6=\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^6=a^{\frac{2}{3}\times 6}=a^4$

問 4・解答

(1) $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[6]{25}=\sqrt[3]{5^2}\times\sqrt[6]{5^2}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=5^1=5$

(2) $\sqrt[4]{2^9}\div\sqrt[8]{2^2}=2^{\frac{9}{4}}\div 2^{\frac{2}{8}}=2^{\frac{9}{4}}\div 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}=2^{\frac{8}{4}}=2^2=4$

(3) $\sqrt{27}\times\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3^3}\times\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=3^2=9$

(4) $\sqrt[3]{16}\div\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{2^4}\div\sqrt[6]{2^2}=2^{\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{2}{6}}=2^{\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=2^1=2$