第53回　第4章　指数関数と対数関数「指数関数」

累乗根 (1)
～ 累乗根とその性質 ～

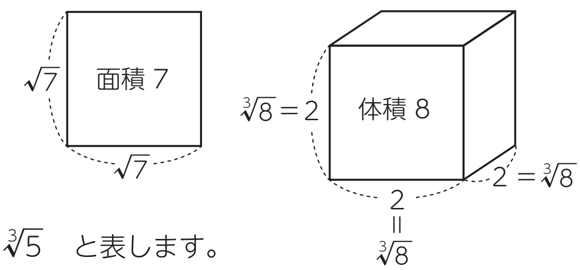
講師
川﨑 宜昭

n 乗すると a になる数について学びます。
また，整数全体の範囲で考えた指数を，
さらに分数の範囲に広げて考えます。

学習のポイント
① 累乗根
② 累乗根の積と商
③ 累乗根の累乗

1 累乗根

・面積が9である正方形の1辺の長さは3　←　3は9の平方根の正の値
・面積が7である正方形の1辺の長さは$\sqrt{7}$　←　$\sqrt{7}$は7の平方根の正の値
・体積が8である立方体の1辺の長さは2
　$2^3 = 8$　となり，　$2 = \sqrt[3]{8}$　と表します。
　2は8の3乗根，または立方根といいます。



・体積が5である立方体の1辺の長さは？
　$\square^3 = 5$　となる□をどう表すか？　➡　$\square = \sqrt[3]{5}$　と表します。

> n 乗すると a になる数を a の n 乗根といいます。
> 2乗根，3乗根，4乗根，・・・をまとめて累乗根といいます。

例　（1）$3^3 = 27$　であるから，$\sqrt[3]{27} = 3$　←　3は27の3乗根
　　（2）$6^3 = 216$　であるから，$\sqrt[3]{216} = 6$　←　6は216の3乗根

$216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$

216を素因数分解すると・・・

```
2)216
2)108
2) 54
3) 27
3)  9
    3
```

> n が正の整数で，$a > 0$ のとき，n 乗して a となる正の数を $\sqrt[n]{a}$ と表します。
> このとき
> $(\sqrt[n]{a})^n = a$　←　「n 回かけて a になる数 $\sqrt[n]{a}$ を n 回かければ a になる」という意味
> $\sqrt[n]{a^n} = a$　←　「n 回かけて a^n になる数は a である」という意味

2 累乗根の積と商

中学校では，$a>0$，$b>0$のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ が成立することを学びました。

例 $\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

累乗根の積と商

$a>0$，$b>0$で，nが正の整数のとき，

（1）$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　（2）$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

（1），（2）は，左辺も右辺も正の数です。

（1）：$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$

$(\sqrt[n]{ab})^n=ab$

したがって，n乗したものどうしが等しくなるので，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

（2）：$\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$

$\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^n=\dfrac{a}{b}$

したがって，n乗したものどうしが等しくなるので，$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

例 （1）$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

（2）$\sqrt[4]{12}\div\sqrt[4]{4}=\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{12}{4}}=\sqrt[4]{3}$

3 累乗根の累乗

$$(\sqrt[4]{a})^3 = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a}$$
$$= \sqrt[4]{a \times a} \times \sqrt[4]{a}$$
$$= \sqrt[4]{a \times a \times a}$$
$$= \sqrt[4]{a^3}$$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ の利用

累乗根の累乗

$\sqrt{\ }$ の中との出し入れ自由！

$a > 0$ で，m，n が正の整数のとき，$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

例　(1) $(\sqrt[7]{a})^3 = \sqrt[7]{a^3}$

(2) $(\sqrt[4]{25})^2 = \sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{(5^2)^2} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

問 1　次の値を求めなさい。
(1) $\sqrt[3]{64}$　　(2) $\sqrt[3]{125}$

問 2　次の値を求めなさい。
(1) $(\sqrt[4]{3})^4$　　(2) $\sqrt[5]{100000}$

問 3　次の計算をしなさい。
(1) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7}$　　(2) $\sqrt[4]{32} \div \sqrt[4]{2}$

問 4　次の計算をしなさい。
(1) $(\sqrt[5]{a})^4$　　(2) $(\sqrt[6]{4})^3$

問 1・解答
(1) $4^3 = 64$ であるから，$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$
(2) $5^3 = 125$ であるから，$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

問 2・解答
(1) $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$　(2) $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$

問 3・解答
(1) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$　(2) $\sqrt[4]{32} \div \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

問 4・解答
(1) $(\sqrt[5]{a})^4 = \sqrt[5]{a^4}$　(2) $(\sqrt[6]{4})^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$