第21回　　第2章　図形と方程式「座標と直線の方程式」

平面上の点の座標 (3)
～ 平面上の外分点・重心の座標 ～

講師
水谷 信也

外分点の座標について考えよう。
そして，三角形の重心の座標の求め方を学習し，
実際に重心の座標を求めてみよう。

学習のポイント
① 平面上の外分点の座標
② 三角形の重心とは？
③ 三角形の重心の座標の求め方

1 平面上の外分点の座標

平面上において，２点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は，

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

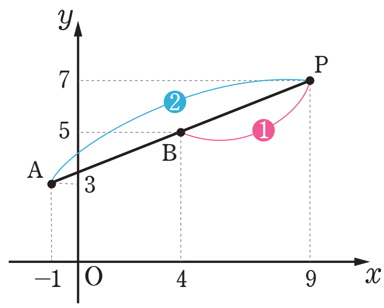
となります。

例　２点 A(− 1，3)，B(4，5) を結ぶ線分 AB を２：１に外分する点 P の

x 座標は，$x=\dfrac{-1\times(-1)+2\times4}{2-1}=9$

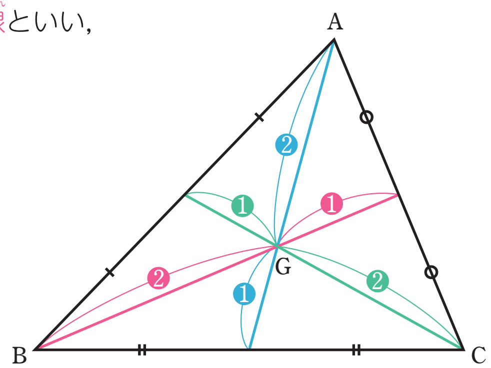
y 座標は，$y=\dfrac{-1\times3+2\times5}{2-1}=7$

よって，P(9，7)



2 三角形の重心とは？

△ ABC の各頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分を中線（ちゅうせん）といい，
３つの中線は１点 G で交わります。
その交点 G を△ ABC の重心（じゅうしん）といいます。
重心 G は，それぞれ中線を２：１に内分しています。



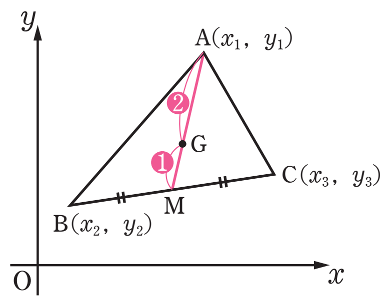
3 三角形の重心の座標の求め方

3点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) を頂点とする△ABC の重心 G の座標を求めてみましょう。

辺 BC の中点 M の座標は,

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

です。



△ABC の重心を G(x, y) とすると,

点 G は中線 AM を 2：1 に内分する点なので,

$$x=\frac{1\times x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{1\times y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

よって，重心 G の座標は,

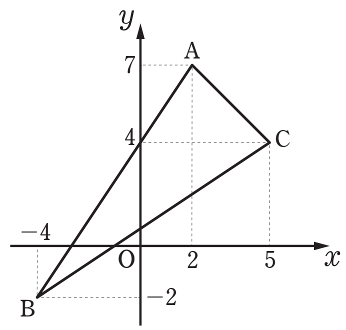
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

例　3点 A(2, 7), B(−4, −2), C(5, 4) を頂点とする△ABC の重心 G の

x 座標は, $x=\dfrac{2+(-4)+5}{3}=\dfrac{3}{3}=1$

y 座標は, $y=\dfrac{7+(-2)+4}{3}=\dfrac{9}{3}=3$

よって，G(1, 3)

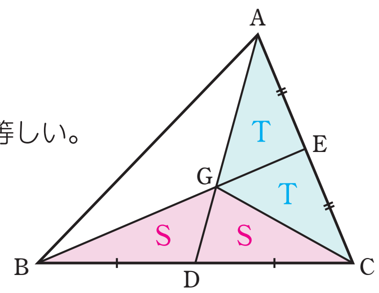


● 三角形の重心が一点で交わり，中線を 2：1 に内分する証明

△ABC で，辺 BC の中点を D，CA の中点を E，AB の中点を F とする。

中線 AD と BE の交点を G とすると，
BD ＝ DC より，底辺の長さが等しく，高さが等しい三角形の面積は等しいので
△BDG ＝△DCG ＝ S とおく
同様にして，
△CEG ＝△AEG ＝ T とおく
また，△BCE と△BEA も底辺の長さと高さが等しいので面積が等しい。
つまり
△BCE ＝△BEA　かつ　△BCE ＋△BEA ＝△ABC　より

△BCE ＝ $\frac{1}{2}$ △ABC が成り立つ。



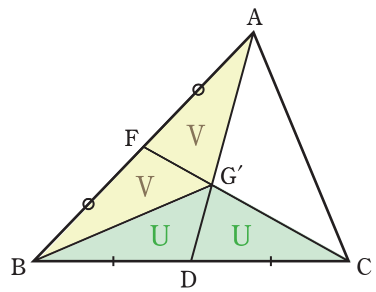
同様に△ADC と△ABD の面積は等しく

△ADC ＝ $\frac{1}{2}$ △ABC が成り立つので

△BCE ＝△ADC，S ＝ T が成り立つ。
したがって，△ACG：△CDG ＝ 2：1 より，AG：GD ＝ 2：1 ・・・①

また，中線 AD と CF の交点を G′ とすると，
同様にして
△BDG′ ＝△DCG′ ＝ U とおく
さらに，
△AFG′ ＝△FBG′ ＝ V とおく

△ABD ＝△BCF ＝ $\frac{1}{2}$ △ABC より U ＝ V



△ABG′：△BDG′ ＝ 2：1 より AG′：G′D ＝ 2：1 ・・・②
①②より G ＝ G′
以上より，3 本の中線は 1 点で交わり，中線を 2：1 に内分する。

※これは，放送の内容に沿った証明で，別の証明法として，D と E および D と F を結んで中点連結の定理を用いる方法もあります。