第13回　第１章　方程式・式と証明「高次方程式」

# 高次方程式（1）

講師
川﨑 宜昭

$x^3-4x^2-7x+10=0$ のような，２次方程式より次数の高い方程式を解く方法を学びましょう。

学習のポイント
① 高次方程式
② 因数分解による解法 ～共通因数の利用～
③ 因数分解による解法 ～$a^3-b^3$の因数分解の利用～

## 1 高次方程式

● ２次方程式

$2x^2+3x+5=0$　←最も大きい次数の項が２次の項である「$2x^2$」

●高次方程式

$x^3-4x^2-7x+10=0$　は３次方程式　←最も大きい次数の項が３次の項である「$x^3$」

$x^4+5x^3-2x^2+x-7=0$　は４次方程式　←最も大きい次数の項が４次の項である「$x^4$」

このように，３次以上の方程式を高次方程式といいます。

さて，

２次方程式では，解の公式を利用して解くことができました。

高次方程式はいつでも解けるとは限りませんが，因数分解することによって簡単に解けるものもあります。

## 2 因数分解による解法 ～共通因数の利用～

因数分解をして，高次方程式を解いてみましょう。
ここでは，共通因数がすぐに見つかる場合の高次方程式について考えます。

例　次の方程式を解きなさい。
（1）　$x^3-5x^2+6x=0$　　　（2）　$x^3-2x^2-2x=0$

解答　（1）　$x^3-5x^2+6x=0$
　共通因数が $x$ なので，$x$ をくくりだして因数分解
$x(x^2-5x+6)=0$
　2次式の部分を因数分解
$x(x-2)(x-3)=0$
$x=0$　または　$x-2=0$　または　$x-3=0$
　$ABC=0$ ならば，$A=0$ または $B=0$ または $C=0$
したがって，$x=0,\ 2,\ 3$

（2）　$x^3-2x^2-2x=0$
　共通因数が $x$ なので，$x$ をくくりだして因数分解
$x(x^2-2x-2)=0$
　2次の因数が出てきても，2次方程式の解の公式が利用できる。
$x=0$　または　$x^2-2x-2=0$
　$x^2-2x-2=0$ は，2次方程式の解の公式を利用！
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-2)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$
したがって，$x=0,\ 1\pm\sqrt{3}$

## 3 因数分解による解法 ～ $a^3 - b^3$ の因数の利用～

方程式 $x^3 - 1 = 0$ を解きなさい。

解答

$x^3 - 1 = 0$

左辺を因数分解すると

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ ← $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ を利用

それぞれの（　）が 0 になればよいから，

$x - 1 = 0$　または　$x^2 + x + 1 = 0$ ← 2次方程式が出てくればもう安心！

$x - 1 = 0$ より，　$x = 1$

$x^2 + x + 1 = 0$ より

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$ ← $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$ で，$i$ は虚数単位

したがって，

$x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

もし，$x^3 - 1$ の因数分解の公式を忘れたら・・・

$x^3 - 1 = 0$ の解のひとつが $x = 1$ であることはすぐにわかる！ ← $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$P(x) = x^3 - 1$ とおくと，$x - 1$ は $P(x)$ の因数になっている。

したがって，

$P(x) = (x-1)\,Q(x)$・・・★

右のわり算より，$P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$

上の★の式で，

「$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ」 $\Longleftrightarrow$ 「$P(1) = 0$」

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x \qquad + 1 \\ \hline
x - 1 & x^3 \qquad\qquad - 1 \\
 & x^3 - x^2 \\ \hline
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad x^2 - x \\ \hline
 & \qquad\qquad x - 1 \\
 & \qquad\qquad x - 1 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

**問 1**　次の方程式を解きなさい。

（1）$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$　　　（2）$x^3 + x^2 - x = 0$

**問 2**　次の方程式を解きなさい。

（1）$x^3 + 1 = 0$　　　（2）$x^3 - 8 = 0$

問 1・解答　（1）$x = -4,\ 0,\ 2$　（2）$x = 0,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

問 2・解答　（1）$x = -1,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$　（2）$x = 2,\ -1 \pm \sqrt{3}\,i$