

解と係数の関係

講師
渡部 儀隆

学習のポイント

2次方程式の解と係数の間に成り立つ関係について学びます。

- ① 2次方程式の解と係数の関係
- ② 解と係数の関係の利用
- ③ 与えられた2つの数を解とする2次方程式

1 2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ の解は、

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

解の和の値は、 $\frac{-5 + \sqrt{13}}{6} + \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

$3x^2 + 5x + 1 = 0$

解の積の値は、 $\frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \times \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} = \frac{(-5)^2 - (\sqrt{13})^2}{36}$

$$= \frac{25 - 13}{36}$$

$$= \frac{12}{36}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$3x^2 + 5x + 1 = 0$

● 2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α , β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例 $2x^2 - 3x + 5 = 0$ の2つの解を α , β とするとき、 α と β の和と積を求めなさい。

解答

和は、 $\alpha + \beta = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

積は、 $\alpha\beta = \frac{5}{2}$

問 1 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めなさい。

(1) $5x^2 + 2x + 3 = 0$

(2) $2x^2 + 3x - 4 = 0$

(3) $x^2 - x - 1 = 0$

2 解と係数の関係の利用

例 2 次方程式 $x^2 + 6x - 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

解答

$\alpha + \beta = -\frac{6}{1} = -6$, $\alpha\beta = \frac{-5}{1} = -5$ を利用します。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-5) \times (-6) = 30$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ← $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 $= (-6)^2 - 2 \times (-5)$
 $= 46$

問 2 2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 与えられた2つの数を解とする2次方程式

3と5を解とする2次方程式で、 x^2 の係数が1のものは

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

← 因数分解によって、この2次方程式の解は $x = 3, 5$

と表されます。

左辺を展開して整理すると

$$x^2 - \underbrace{(3 + 5)}_{\text{和}}x + \underbrace{3 \times 5}_{\text{積}} = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

となります。

● 与えられた2つの数を解とする2次方程式

2つの数 α, β を解とする2次方程式の1つは、

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

例 2つの数 $2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$ を解とする2次方程式をつくりなさい。

解答

2つの解の和と積を計算する。

和の値は、 $(2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4$

積の値は、 $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$

したがって、求める2次方程式は、

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

問1・解答

(1) 和は $-\frac{5}{2}$, 積は $\frac{5}{3}$

(2) 和は $-\frac{2}{3}$, 積は $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

(3) 和は $-\frac{1}{-1} = 1$, 積は $-\frac{1}{-1} = -1$

問2・解答

(1) 20

(2) $\frac{5}{4}$

(3) 6