第84回　第５章　微分と積分　[積分]

面積 (2)

面積を求める工夫

講師
矢作 裕滋

$f(x) \leqq 0$ であるような曲線 $y=f(x)$ によって囲まれた図形や，２曲線によって囲まれた図形の面積を求められるようにするための工夫を学習しましょう。

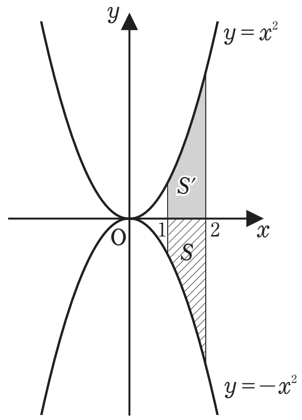
学習のポイント

① $f(x) \leqq 0$ となる場合の面積
② 2曲線間の面積を定積分で表す方法
③ 2曲線間の面積の計算

$f(x) \leqq 0$ となる場合の面積

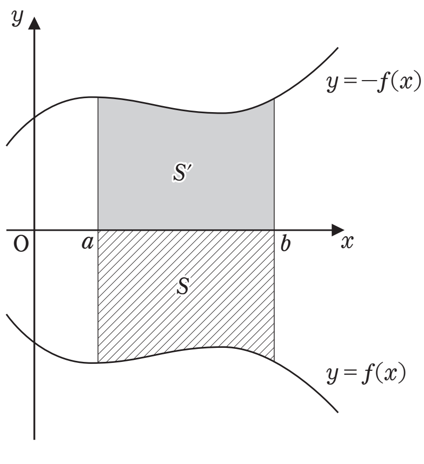
曲線 $y=-x^2$ と x 軸および2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。
右図で、曲線 $y=-x^2$ と $y=x^2$ は x 軸に関して対称である。面積 S の代わりに面積 S' を求めればよい。

$$S=S'=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2=\frac{1}{3}(2^3-1^3)=\frac{7}{3}$$



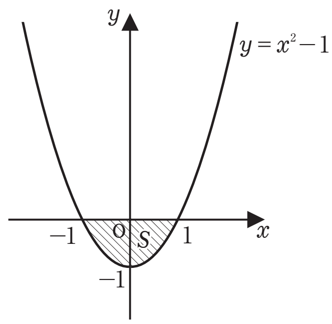
$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \leqq 0$ のとき， 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S を求める。
右図で，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=-f(x)$ は，x 軸に関して対称であるから，右図で $S=S'$

したがって，　$S=\int_a^b\{-f(x)\}\,dx$



例題１　曲線$y=x^2-1$とx軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

解答　曲線$y=x^2-1$とx軸の交点のx座標は，
$x^2-1=0$より，$x=-1,\ 1$
$-1\leqq x\leqq 1$で$x^2-1\leqq 0$であるから，
求める面積Sは，

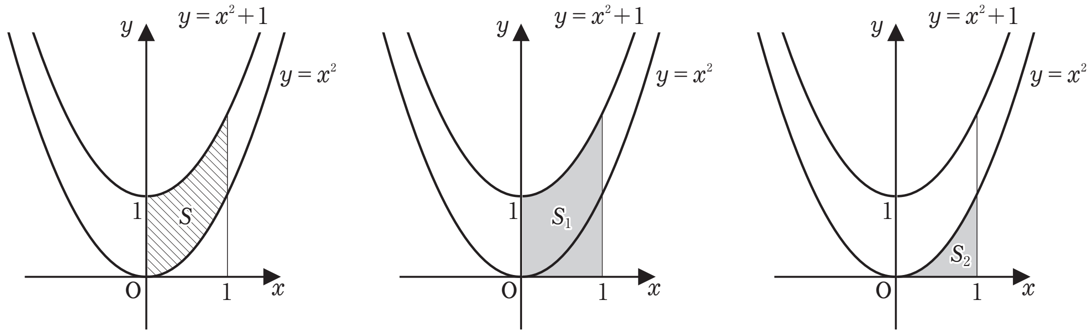


$$S=\int_{-1}^{1}\{-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[x\right]_{-1}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1}+\left[x\right]_{-1}^{1}$$
$$=-\frac{1}{3}\{1^3-(-1)^3\}+\{1-(-1)\}$$
$$=-\frac{1}{3}\times 2+2$$
$$=\frac{4}{3}$$

問１　次の曲線とx軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。
(1) $y=x^2-3x$　　(2) $y=x^2+x-6$

２曲線間の面積を定積分で表す方法

例１　2曲線$y=x^2+1$，$y=x^2$と2直線$x=0$，$x=1$で囲まれた図形の面積Sを求めなさい。



$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 (x^2 + 1)\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 \{(x^2 + 1) - x^2\}\,dx$$

$$= \int_0^1 dx$$

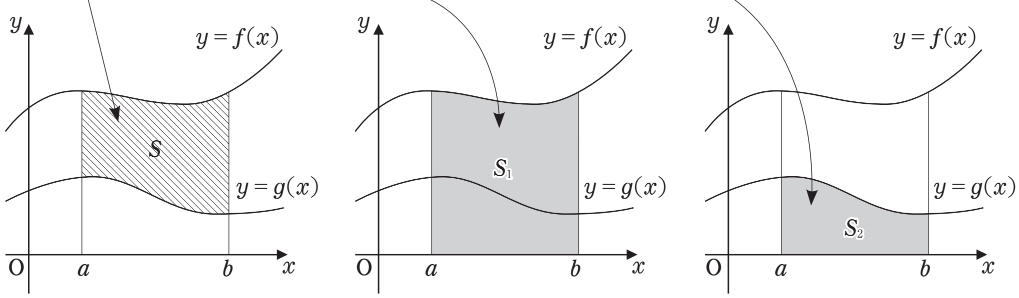
$$= \Big[x\Big]_0^1$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq g(x)$ のとき，２曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と２直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた図形の面積を S とする。

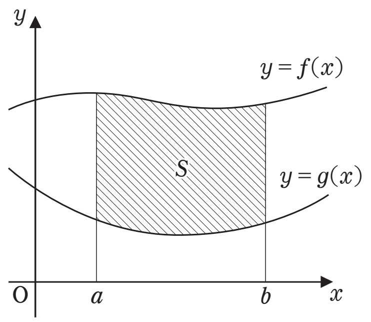
$$S = \boxed{S_1} - \boxed{S_2} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$



2曲線間の面積

$a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq g(x)$ のとき

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

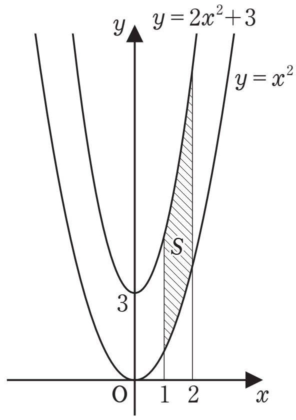


2曲線間の面積の計算

例2　2曲線$y=2x^2+3$，$y=x^2$と2直線$x=1$，$x=2$で囲まれた図形の面積を求めなさい。

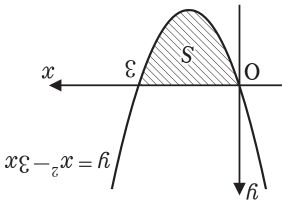
$1\leqq x\leqq 2$の範囲で，$2x^2+3\geqq x^2$であるから，求める面積をSとすると，

$$S=\int_1^2\{(2x^2+3)-x^2\}dx$$
$$=\int_1^2(x^2+3)dx$$
$$=\int_1^2 x^2dx+3\int_1^2 dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2+3\left[x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2+3\left[x\right]_1^2$$
$$=\frac{16}{3}$$



問１・解答

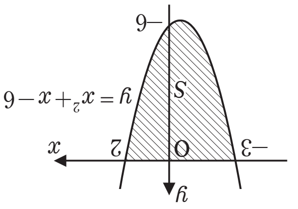
(1)　曲線$y=x^2-3x$とx軸の交点のx座標は，
$x^2-3x=0$より　$x=0$，3



$0\leqq x\leqq 3$で$x^2-3x\leqq 0$であるから，
求める面積Sは

$$S=\int_0^3\{-(x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx$$
$$=-\int_0^3 x^2dx+3\int_0^3 x\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^3+\frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{2}$$

(2)　曲線$y=x^2+x-6$とx軸の交点のx座標は，
$x^2+x-6=0$より　$x=-3$，2



$-3\leqq x\leqq 2$で$x^2+x-6\leqq 0$であるから，
求める面積Sは

$$S=\int_{-3}^2\{-(x^2+x-6)\}dx$$
$$=\int_{-3}^2(-x^2-x+6)dx$$
$$=-\int_{-3}^2 x^2dx-\int_{-3}^2 x\,dx+6\int_{-3}^2 dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^2-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^2+6\left[x\right]_{-3}^2$$
$$=-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-3}^2-\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-3}^2+6\left[x\right]_{-3}^2$$
$$=\frac{125}{6}$$