面積 (1)

定積分と面積

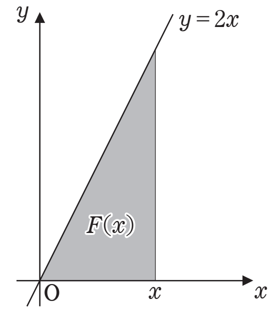
講師
矢作 裕滋

曲線と直線で囲まれた図形の面積を，定積分を用いて求めます。

学習のポイント

① 三角形や台形の面積と定積分との関係
② 定積分を用いて図形の面積を求める方法
③ $f(x) \geqq 0$ となる場合の面積

三角形や台形の面積と定積分との関係



右図で，面積$F(x)$は，

$$F(x) = \frac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$$

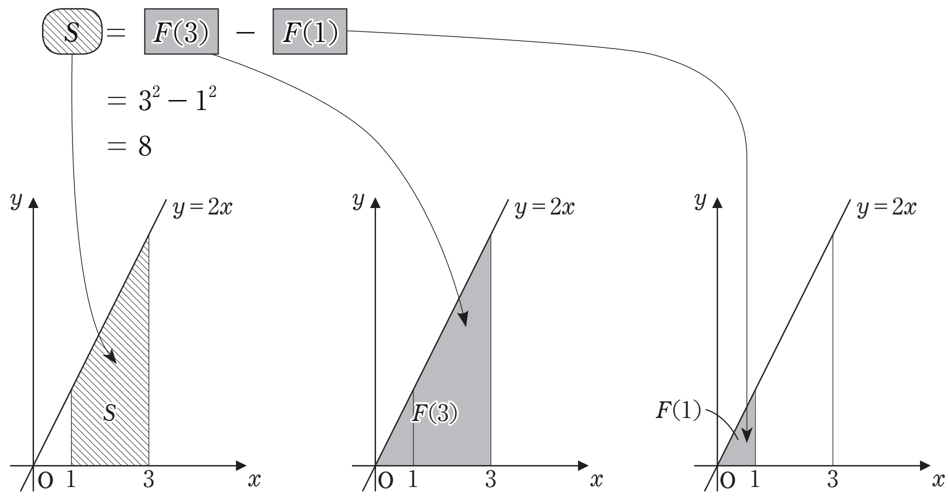
ここで，

$$F'(x) = 2x$$

よって　$F(x)$は関数$y = 2x$の不定積分。

下図の斜線部分の面積Sは，

$$S = F(3) - F(1)$$
$$= 3^2 - 1^2$$
$$= 8$$



以上より，　$S = 3^2 - 1^2 = \Big[x^2\Big]_1^3 = \int_1^3 2x\,dx$

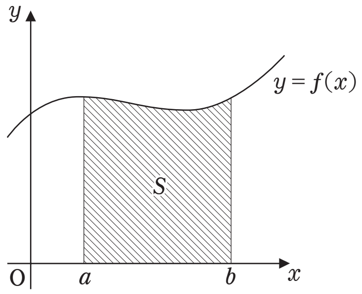
定積分を用いて図形の面積を求める方法

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$ と $x=b$ で囲まれた図形の面積 S は、$f(x)$ の a から b までの定積分に等しい。

定積分と面積

$a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



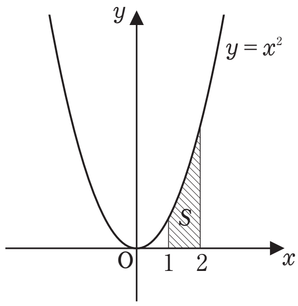
関数 $f(x)$ のグラフが，x 軸から上にある場合に使える公式です。

$f(x) \geqq 0$ となる場合の面積

例1　曲線 $y=x^2$ と x 軸および2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積

S は，$1 \leqq x \leqq 2$，$x^2 \geqq 0$ より，

$$S=\int_1^2 x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2=\frac{1}{3}(2^3-1^3)$$
$$=\frac{7}{3}$$

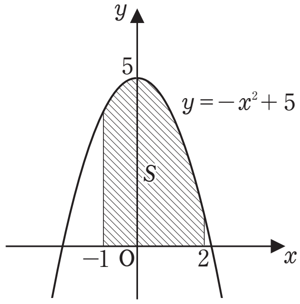


問1　曲線 $y=x^2$ と x 軸および2直線 $x=3$，$x=5$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

例2

曲線$y=-x^2+5$とx軸および2直線$x=-1$，$x=2$で囲まれた図形の面積Sは，

$-1\leqq x\leqq 2$で$-x^2+5\geqq 0$より，



$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}(-x^2+5)\,dx\\&=-\int_{-1}^{2}x^2\,dx+5\int_{-1}^{2}dx\\&=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}+5\Big[x\Big]_{-1}^{2}\\&=-\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_{-1}^{2}+5\Big[x\Big]_{-1}^{2}\\&=-\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}+5\{2-(-1)\}\\&=-\frac{1}{3}\times 9+5\times 3\\&=-3+15\\&=12\end{aligned}$$

問2

曲線$y=-x^2+5$とx軸および2直線$x=1$，$x=2$で囲まれた図形の面積を求めなさい。

問1・解答

求める図形の面積をSとすると，$3\leqq x\leqq 5$で$x^2\geqq 0$であるから

$$S=\int_{3}^{5}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{3}^{5}=\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_{3}^{5}=\frac{98}{3}$$

問2・解答

求める図形の面積をSとすると，$1\leqq x\leqq 2$で$-x^2+5\geqq 0$であるから

$$\begin{aligned}S&=\int_{1}^{2}(-x^2+5)\,dx\\&=-\int_{1}^{2}x^2\,dx+5\int_{1}^{2}dx\\&=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}+5\Big[x\Big]_{1}^{2}\\&=-\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_{1}^{2}+5\Big[x\Big]_{1}^{2}\\&=\frac{8}{3}\end{aligned}$$