

定積分 (2)

定積分の計算

講師

矢作 裕滋

学習のポイント

定積分の公式を理解し、その公式を使って定積分の計算ができるようにしましょう。

- ① 関数の実数倍の定積分
- ② 関数の和や差の定積分
- ③ 公式を利用した定積分の計算

関数の実数倍の定積分

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ は定数})$$

不定積分とほぼ同じ公式！

例 1

$$\begin{aligned} \int_0^3 4x dx &= 4 \int_0^3 x dx && \longleftarrow \text{定数 } 4 \text{ をインテグラルの前へ} \\ &= 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= 2 [x^2]_0^3 && \longleftarrow \left[\quad \right] \text{ 中の } \frac{1}{2} \text{ を前へ} \\ &= 2(3^2 - 0^2) \\ &= 18 \end{aligned}$$

第81回放送の学習メモ
の間(1)の解答と見くら
べてみましょう。

関数の和や差の定積分

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

不定積分とほぼ同じ公式！

定積分の公式

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ は定数}) \\ \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

公式を利用した定積分の計算

例2

$$\int_1^3 (3x^2 - 4x + 2) dx = 3 \int_1^3 x^2 dx - 4 \int_1^3 x dx + 2 \int_1^3 dx$$

定数はインテグラルの前へ!

各項に分けて
定積分を計算する。

$$= 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 + 2 [x]_1^3$$

$$= [x^3]_1^3 - 2 [x^2]_1^3 + 2 [x]_1^3$$

$[x^3 - 2x^2 + 2x]_1^3$ として計算してもよい

$$= (3^3 - 1^3) - 2(3^2 - 1^2) + 2(3 - 1)$$

$$= 14$$

問1 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_2^4 (3x^2 - 6x) dx$ (2) $\int_0^2 (-x^2 + 2x + 4) dx$

例3

$$\int_1^2 (x-1)(x+3) dx = \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= \int_1^2 x^2 dx + 2 \int_1^2 x dx - 3 \int_1^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - 3 [x]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 - 3 [x]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} (2^3 - 1^3) + (2^2 - 1^2) - 3(2 - 1)$$

$$= \frac{7}{3}$$

問2 次の定積分を求めなさい。

(1) $\int_1^3 (x+1)(x-3) dx$ (2) $\int_{-1}^2 (x+3)^2 dx$

問 1・解答

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} + 1 + 4 - 0 = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

問 2・解答

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 (x^2 - x) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\
 &= \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= 9 - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{18}{2} - \frac{9}{2} - \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{9}{2} - \frac{2}{6} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{9}{2} + \frac{1}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$