第80回　第5章　微分と積分　[積分]

不定積分 (2)

不定積分の計算

講師
矢作 裕滋

関数の実数倍や，2つ以上の関数の和および差の不定積分の求め方を学習します。また，ある条件を与えると積分定数が定まる問題も考えてみましょう。

学習のポイント

① 関数の実数倍の不定積分
② 関数の和や差の不定積分
③ 積分定数の決定

関数の実数倍の不定積分

kを定数とし，$F'(x)=f(x)$が成り立つとき，$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$
したがって，

不定積分の公式

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k\text{は定数})$$

例　$\int 3x^2dx=3\int x^2dx=3\times\dfrac{x^3}{3}+C=x^3+C$　(Cは積分定数)

問1　次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int 6x\,dx$　(2) $\int(-8x)\,dx$

(3) $\int(-4x^2)\,dx$　(4) $\int 3\,dx$

関数の和や差の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$が成り立つとき，

$$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$$
$$\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$$

したがって，

不定積分の公式

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

例　不定積分の公式を用いて，不定積分を求めてみよう。

(1) $\int(x^2+x)dx = \int x^2 dx + \int x dx$

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$

(2) $\int(x^2-3x+2)dx = \int x^2 dx - 3\int x dx + 2\int dx$

$= \dfrac{x^3}{3} - 3 \times \dfrac{x^2}{2} + 2 \times x + C$

$= \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$

問2　次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int(6x+5)dx$　　(2) $\int(-3x+1)dx$

(3) $\int(2x^2-5x-3)dx$　　(4) $\int(-6x^2+2x+3)dx$

例題　不定積分 $\int(x+1)(2x-3)dx$ を求めなさい。

解答　$\int(x+1)(2x-3)dx = \int(2x^2-x-3)dx$

$= 2\int x^2 dx - \int x dx - 3\int dx$

$= \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - 3x + C$

問3　次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int(x-2)(x+1)dx$　　(2) $\int(3x-1)(x+2)dx$

(3) $\int(x-3)^2 dx$　　(4) $\int(3x+2)^2 dx$

関数の和や差の不定積分

例題　関数 $f(x)=2x+3$ の不定積分のうち，$F(1)=5$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

解答　$F(x)=\int(2x+3)dx$

$=2\int xdx+3\int dx$

$=x^2+3x+C$

ここで，$F(1)=5$ であるから，

$1^2+3\times1+C=5$

$4+C=5$

$C=1$

よって，求める関数 $F(x)$ は，

$F(x)=x^2+3x+1$

問4　関数 $f(x)=-2x+1$ の不定積分のうち，$F(2)=3$ を満たす $F(x)$ を求めなさい。

◀

問1・解答　(1) $3x^2+C$　(2) $-4x^2+C$　(3) $-\frac{4}{3}x^3+C$　(4) $3x+C$

問2・解答　(1) $3x^2+5x+C$　(2) $-\frac{3}{2}x^2+x+C$

(3) $\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-3x+C$　(4) $-2x^3+x^2+3x+C$

問3・解答　(1) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$　(2) $x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+C$

(3) $\frac{x^3}{3}-3x^2+9x+C$　(4) $3x^3+6x^2+4x+C$

問4・解答　$F(x)=-x^2+x+5$