第78回　第5章　微分と積分　[導関数の応用]

関数の最大・最小

与えられた定義域での関数の最大・最小

講師
渡部 儀隆

増減表やグラフを利用して，決められたxの値の範囲で，関数の最大値・最小値を求めよう。

学習のポイント

① ３次関数の最大値と最小値
② 極小値・最小値と極大値・最大値
③ 関数の最大・最小の応用

３次関数の最大値と最小値

例題３　次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

$y=x^3-3x^2+1 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

↑

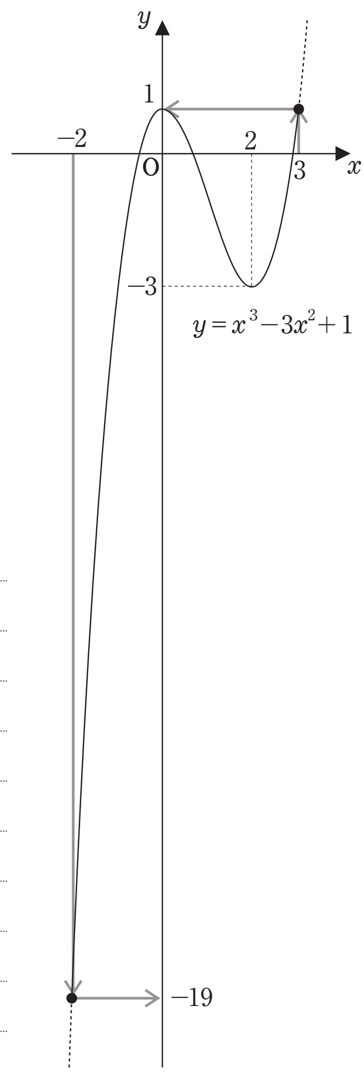
$(-2 \leqq x \leqq 3)$は，この関数の定義域が$-2 \leqq x \leqq 3$であることを表す。

解答　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$の解は $x=0,\ 2$

$-2 \leqq x \leqq 3$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-19	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗	1



よって，この関数は

$x=0,\ 3$のとき，最大値1

$x=-2$のとき，最小値-19

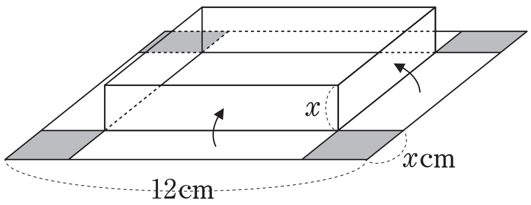
をとる。

極小値・最小値と極大値・最大値

極小値が最小値になるとはかぎらない。
同様に，極大値が最大値になるとはかぎらない。

関数の最大・最小の応用

例題４　１辺が12cmの正方形の紙がある。いま，この４隅から１辺が$x$cmの同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない高さ$x$cmの直方体の箱を作る。この箱の容積を最大にするには，xの値をいくらにすればよいですか。



解答　箱の底面の１辺は$(12-2x)$cm，高さは$x$cmである。
これらは正であるから

$$0<x<6$$

◀**連立不等式**
$x>0$，　$12-2x>0$
を解いて
$0<x<6$

箱の容積を$y$cm^{3}とすると

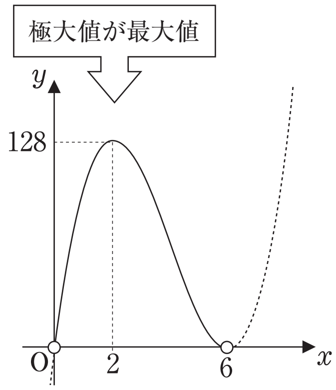
$$y=x(12-2x)^2$$
$$=4x^3-48x^2+144x$$
$$y'=12x^2-96x+144$$
$$=12(x^2-8x+12)$$
$$=12(x-2)(x-6)$$

$y'=0$の解は　$x=2$，6

$0<x<6$の範囲でyの増減表は，次のようになる。

x	0	…	2	…	6
y'		+	0	−	
y		↗	極大 128	↘	

↑
この極大値が最大値になる。



よって，容積を最大にするには，$x=2$とすればよい。