第69回　第5章　微分と積分　[微分係数と導関数]

導関数（2）

x^nの導関数と公式

講師
矢作 裕滋

導関数を簡単に求める方法について学ぼう。

学習のポイント

① x^nの導関数
② 関数 $f(x)=c$ の導関数
③ いろいろな関数の導関数

x^nの導関数

例　関数$f(x)=x^3$を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)^3 - x^3 = h(3x^2+3xh+h^2)$$

よって

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$$

▶ $(x+h)^3-x^3$
$= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$
$= 3x^2h+3xh^2+h^3$
$= h(3x^2+3xh+h^2)$

関数$y=f(x)$の導関数を表すには，$f'(x)$のほかに
　y'，$\{f(x)\}'$　などの記号も用いられる。
すでに学んだように，$(x)'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$である。
一般に次の公式が成り立つ。

▶関数$y=x^2$の導関数は，
$y'=2x$，$(x^2)'=2x$
などと表す。

x^nの導関数　nが正の整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

1小さくする
$(x^{\blacksquare})' = \blacksquare x^{\blacksquare-1}$
前に出す

関数 $f(x)=c$ の導関数

関数$f(x)=2$を微分してみよう。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0$$

同様にして，cを定数とするとき，関数$f(x)=c$ の導関数は次のようになる。

関数$f(x)=c$の導関数　$f'(x)=(c)'=0$

いろいろな関数の導関数

例1　関数 $f(x)=4x^2$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=4(x+h)^2-4x^2$$
$$=4h(2x+h)$$

よって　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}4(2x+h)$$
$$=4\times 2x$$
$$=8x$$

▶ $4(x+h)^2-4x^2$
$=4x^2+8xh+4h^2-4x^2$
$=8xh+4h^2$
$=4h(2x+h)$

$(x^2)'=2x$ であるから，例１より，次の式が成り立つ。

$$(4x^2)'=4(x^2)'$$

$(4x^2)'=4(x^2)'$
定数を前に出す

例２　関数 $f(x)=x^2+x$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)$$
$$=h(2x+h+1)$$

よって　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h+1)$$
$$=2x+1$$

▶ $\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)$
$=x^2+2xh+h^2+x+h-x^2-x$
$=2xh+h^2+h$
$=h(2x+h+1)$

$(x^2)'=2x$，$(x)'=1$ であるから，例２より，次の式が成り立つ。

$$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$$

一般に，次のことが成り立つ。

$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$

導関数の公式

$$\{kf(x)\}'=kf'(x)\qquad（k は定数）$$
$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$
$$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$$