

導関数 (2)

x^n の導関数と公式

講師

矢作 裕滋

学習のポイント

導関数を簡単に求める方法について学ぼう。

- ① x^n の導関数
- ② 関数 $f(x)=c$ の導関数
- ③ いろいろな関数の導関数

x^n の導関数

例 関数 $f(x)=x^3$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= (x+h)^3 - x^3 \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright (x+h)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには、 $f'(x)$ のほかに

y' , $\{f(x)\}'$ などの記号も用いられる。

すでに学んだように、 $(x)'=1$, $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$ である。

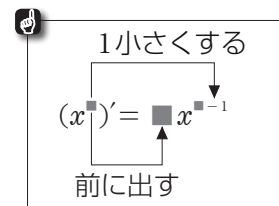
一般に次の公式が成り立つ。

▶ 関数 $y=x^2$ の導関数は、

$$y'=2x, (x^2)'=2x$$

などと表す。

x^n の導関数 n が正の整数のとき $(x^n)'=nx^{n-1}$



関数 $f(x)=c$ の導関数

関数 $f(x)=2$ を微分してみよう。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

同様にして、 c を定数とするとき、関数 $f(x)=c$ の導関数は次のようになる。

関数 $f(x)=c$ の導関数 $f'(x) = (c)' = 0$

いろいろな関数の導関数

例1 関数 $f(x) = 4x^2$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= 4(x+h)^2 - 4x^2 \\ &= 4h(2x+h) \end{aligned}$$

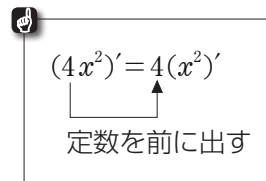
よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4(2x+h) \\ &= 4 \times 2x \\ &= 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright 4(x+h)^2 - 4x^2 \\ &= 4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x^2 \\ &= 8xh + 4h^2 \\ &= 4h(2x+h) \end{aligned}$$

$(x^2)' = 2x$ であるから、例1より、次の式が成り立つ。

$$(4x^2)' = 4(x^2)'$$



例2 関数 $f(x) = x^2 + x$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \{(x+h)^2 + (x+h)\} - (x^2 + x) \\ &= h(2x+h+1) \end{aligned}$$

よって

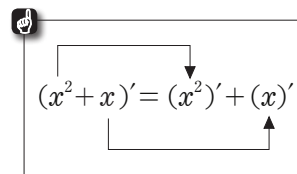
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h+1) \\ &= 2x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \{(x+h)^2 + (x+h)\} - (x^2 + x) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x \\ &= 2xh + h^2 + h \\ &= h(2x+h+1) \end{aligned}$$

$(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$ であるから、例2より、次の式が成り立つ。

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'$$

一般に、次のことが成り立つ。



導関数の公式

$$\{kf(x)\}' = kf'(x) \quad (k \text{ は定数})$$

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$