

累乗根 (2)

分数の指数

講師
渡部儀隆

学習のポイント

整数全体の範囲で考えた指数をさらに分数に
広げて考えてみましょう。

- ① 分数の指数とは？
- ② 指数が分数や整数のときの指数法則
- ③ 指数法則を用いた計算

分数の指数とは？

指数が分数のときにも指数法則，

$(a^m)^n = a^{mn}$ が成り立つように，指数の意味を拡張しよう。

上の指数法則が， $m = \frac{1}{3}$ ， $n = 3$ のときも成り立つとすると，

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \times 3} = a^1 = a$$

これは， $a^{\frac{1}{3}}$ が a の3乗根であることを表しているから，

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \quad \text{であることがわかる。}$$

そこで， $a > 0$ で， n が正の整数のとき，

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{と定めると，}$$

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \times 2} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

一般に次のように定める。

【分数の指数】

$a > 0$ で， m, n が正の整数のとき

$$[1] \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad [2] \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

例

- (1) $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$
- (2) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$
- (3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$
- (4) $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

問

次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表しなさい。

- (1) $\sqrt[3]{a}$
- (2) $\sqrt[3]{a^4}$
- (3) $(\sqrt[4]{a})^5$
- (4) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

指数が分数や整数のときの指数法則

分数の指数を前ページ [1], [2] のように定めると, 指数がどのような分数や整数であっても, 下記の指数法則が成り立つ。

【指数法則】

$a > 0, b > 0$ で, p, q が分数や整数のとき

[1] $a^p \times a^q = a^{p+q}$

[2] $a^p \div a^q = a^{p-q}$

[3] $(a^p)^q = a^{pq}$

[4] $(ab)^p = a^p b^p$

※以後 a, b は正の数を表すものとする。

指数法則を用いた計算

- 例**
- (1) $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$
- (2) $a^{\frac{7}{4}} \div a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{7}{4} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{4}{4}} = a^1 = a$
- (3) $(\sqrt[5]{a^2})^{10} = (a^{\frac{2}{5}})^{10} = a^{\frac{2}{5} \times 10} = a^4$

例 次の計算をなさい。

- (1) $\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4}$ (2) $\sqrt{8} \div \sqrt[6]{8}$

解答

$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4} &= 3^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{4}{3}} \\ &= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \\ &= 3^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} \\ &= 3^{\frac{6}{3}} \\ &= 3^2 \\ &= 9 \end{aligned}$	⋮	$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt{8} \div \sqrt[6]{8} &= \sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{2^3} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{3}{6}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{2}{2}} \\ &= 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$
---	---	--

$\sqrt[n]{a} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{1} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{1}$ (7)
 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1}$ (8)
 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{1}}}$ (7)
 $\sqrt[n]{a} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{1}$ (1)

景観・留