第50回　第3章　三角関数　[加法定理]

弧度法 (2)

弧度法は便利！

講師
川﨑宣昭

これまで，角の大きさは30°，60°，90°，… などのように度を単位として表してきましたが，ここでは，これとは別の角の表し方を考えます。今回は，弧度法を使って，三角関数の値を求めたり，おうぎ形の弧の長さや面積を求める方法を学習します。

学習のポイント

① 弧度法による三角関数の値の求め方
② 弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積
③ おうぎ形の弧の長さと面積の求め方

弧度法による三角関数の値の求め方

弧度法を 60 分法（ラジアンを角度）におき換える。

- $\sin\dfrac{7}{6}\pi=\sin210^\circ=\sin(30^\circ+180^\circ)=-\sin30^\circ=-\dfrac{1}{2}\leftarrow\sin(\theta+180^\circ)=-\sin\theta$

  ※$\dfrac{7}{6}\pi$ ラジアン$=\dfrac{7}{6}\pi\times1$ ラジアン$=\dfrac{7}{6}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=210^\circ$

- $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos(-60^\circ)=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}\leftarrow\cos(-\theta)=\cos\theta$

  ※$-\dfrac{\pi}{3}$ ラジアン$=-\dfrac{\pi}{3}\times1$ ラジアン$=-\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=-60^\circ$

- $\cos\dfrac{7}{4}\pi=\cos315^\circ=\cos(135^\circ+180^\circ)=-\cos135^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leftarrow\cos(\theta+180^\circ)=-\cos\theta$

  ※$\dfrac{7}{4}\pi$ ラジアン$=\dfrac{7}{4}\pi\times1$ ラジアン$=\dfrac{7}{4}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=315^\circ$

- $\sin\left(-\dfrac{4}{3}\pi\right)=\sin(-240^\circ)=-\sin240^\circ=-\sin(180^\circ+60^\circ)=-(-\sin60^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  $\leftarrow\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \sin(\theta+180^\circ)=-\sin\theta$

  ※$-\dfrac{4}{3}\pi$ ラジアン$=-\dfrac{4}{3}\pi\times1$ ラジアン$=-\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=-240^\circ$

弧度法によるおうぎ形の弧の長さと面積

■弧度法で表された中心角の大きさと弧の長さ

半径が等しいおうぎ形は，中心角と弧の長さが比例する。

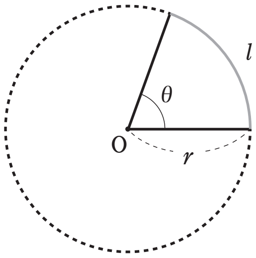
したがって，

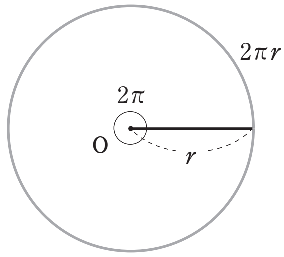
おうぎ形の弧の長さ ： 円周の長さ ＝ おうぎ形の中心角 ： 2π ラジアン (360°)

⇒ $l : 2\pi r = \theta : 2\pi$

よって，$2\pi l = 2\pi r\theta$

したがって，$\boldsymbol{l = r\theta}$





■弧度法で表された中心角の大きさとおうぎ形の面積

半径が等しいおうぎ形の面積は，中心角の大きさに比例する。

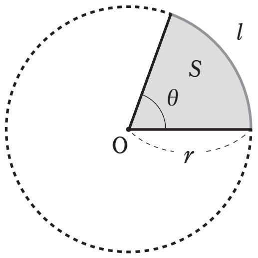
したがって，

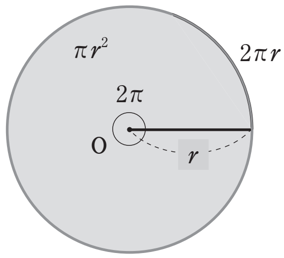
おうぎ形の面積 ： 円の面積 ＝ おうぎ形の中心角 ： ラジアン (360°)

⇒ $S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$

よって，$2\pi S = \pi r^2 \theta$

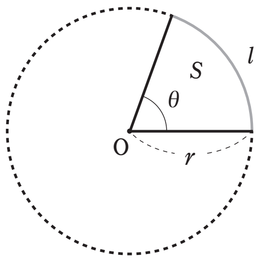
したがって，$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} r^2 \theta}$





【おうぎ形に関する公式】

> **半径 r のおうぎ形の中心角を θ，弧の長さを l，**
> **面積を S とするとき，**
>
> $$\boldsymbol{l = r\theta,\quad S = \frac{1}{2} r^2 \theta}$$



おうぎ形の弧の長さと面積の求め方

●半径 8cm，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ のおうぎ形について，

弧の長さは，$l = 8 \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi$ (cm)

面積は，$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4}\pi = 24\pi$ (cm^2)

※ $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r(r\theta) = \frac{1}{2}rl$ より，底辺が l，高さが r の三角形の面積をイメージして

おうぎ形の面積を求めることができるので，

$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6\pi = 24\pi$ (cm^2) ⬅ 三角形の面積を求めるような感覚！

●半径 6cm，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ のおうぎ形について，

弧の長さは，$l = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$ (cm)

面積は，$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$ (cm^2)

※ $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\pi = 12\pi$ (cm^2) ⬅ 三角形の面積を求めるような感覚！