加法定理の応用 (2)

三角関数の合成

講師
川﨑宣昭

加法定理を利用して，三角関数のいろいろな公式を導きます。特に今回は，三角関数の合成の公式について学習し，その公式を使えるようにします。

学習のポイント

① 三角関数の合成とは？
② 三角関数の合成の公式
③ 三角関数の合成の公式の使い方

三角関数の合成とは？

$2\sin(\theta+30^\circ)$ に加法定理を利用すると，

$$\begin{aligned}2\sin(\theta+30^\circ) &= 2\sin\theta\cos30^\circ + 2\cos\theta\sin30^\circ\\ &= 2\sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos\theta\times\frac{1}{2}\\ &= \sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\end{aligned}$$

したがって，逆をたどれば，$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ は $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形できる。

では，

$\sin\theta+\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ のとき，r や α は？

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ のとき，r や α は？

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の式を $r\sin(\theta+\alpha)(r>0)$ の形にすることを，**三角関数の合成**という。

三角関数の合成の公式

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ の具体例で考えてみよう。

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)(r>0)$ の形にするので，$r\sin(\theta+\alpha)$ に加法定理を使ってみると，

$$\begin{aligned}r\sin(\theta+\alpha) &= r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha\\ &= \boxed{r\cos\alpha}\sin\theta + \boxed{r\sin\alpha}\cos\theta\end{aligned}$$

$$\underset{\sqrt{3}}{\overset{r\cos\alpha}{\parallel}} \qquad \underset{1}{\overset{r\sin\alpha}{\parallel}}$$

● r の求め方

$r\cos\alpha=\sqrt{3}$，$r\sin\alpha=1$ なので，

$$\begin{aligned}&r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha = (\sqrt{3})^2+1^2=4\\ &r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=4\\ &r^2=4\\ &r=2(r>0)\end{aligned}$$

➡

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ のとき，
$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

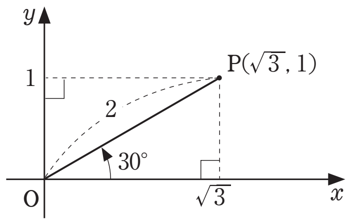
$a\sin\theta+b\cos\theta$ のとき，
$r=\sqrt{a^2+b^2}$

● αの求め方

$2\cos\alpha = \sqrt{3}$，$2\sin\alpha = 1$ なので，

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

より，$\alpha = 30^\circ$



※右図のような直角三角形を考えると，30° であることがわかる。

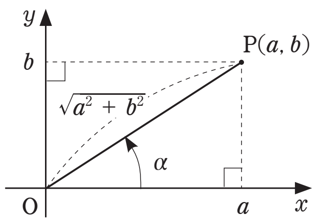
$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ のとき，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

$a\sin\theta + b\cos\theta$ のとき，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【三角関数の合成】

$$\boldsymbol{a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

ただし，$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



三角関数の合成の公式の使い方

■ $\sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{1^2+1^2}\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)$

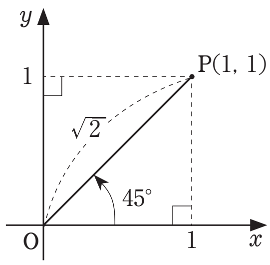
ただし，α は，

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を満たす角である。

　したがって，$\alpha = 45^\circ$ となるから，

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$　……（答）



■ $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$

$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\sin(\theta+\alpha) = 2\sin(\theta+\alpha)$

ただし，α は，

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を満たす角である。

　したがって，$\alpha = 60^\circ$ となるから，

$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta + 60^\circ)$　……（答）