第47回　第3章　三角関数　[加法定理]

加法定理の応用 (1)

2倍角の公式

講師
川﨑宣昭

加法定理を利用して，三角関数のいろいろな公式を導きます。特に今回は，2倍角の公式を証明し，その公式を使うことを学習します。

学習のポイント

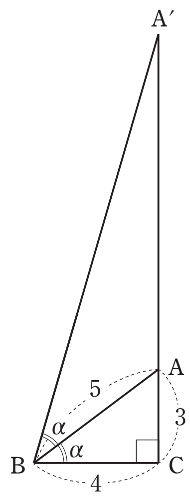
① 2倍角の公式とは？
② 2倍角の公式の特徴
③ 2倍角の公式を用いた三角関数の値の求め方

2倍角の公式とは？

60° は 30° の2倍の大きさの角度ですが，30° のサイン，コサインの値と，60° のサイン，コサインの値は，今までの学習から値がすぐにわかります。

α が第1象限の角で，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ の値が求められます！

右図は，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ であり，$\sin 2\alpha = \dfrac{\text{A}'\text{C}}{\text{BA}'}$，$\cos 2\alpha = \dfrac{\text{BC}}{\text{A}'\text{B}}$ の値が求められます！



2倍角の公式の特徴

サインの加法定理は，

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

この式で，β を α に置き換えると，

$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　→　**サインの2倍角の公式**

コサインの加法定理は，

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

この式で，β を α に置き換えると，

$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$　→　**コサインの2倍角の公式（1）**

コサインの2倍角公式（1）で，$\cos^2\alpha$ を $1-\sin^2\alpha$ をに置き換えると，

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$　→　**コサインの2倍角の公式（2）**

コサインの2倍角公式（1）で，$\sin^2\alpha$ を $1-\cos^2\alpha$ に置き換えると，

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$　→　**コサインの2倍角の公式（3）**

【2 倍角の公式】

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　←　$\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ の両方の値がわからなければいけない。
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 1 - 2\sin^2\alpha$　←　$\sin\alpha$ だけの値がわかればよい。
$= 2\cos^2\alpha - 1$　←　$\cos\alpha$ だけの値がわかればよい。

※ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ で β を α におき換えれば，$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2倍角の公式を用いた三角関数の値の求め方

例　α が第 1 象限の角で，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求めなさい。

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ より，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ の値以外に $\cos\alpha$ の値を求める必要がある。

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$　←　$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

α は第 1 象限の角だから，$\cos\alpha > 0$

よって，$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

したがって，

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}$　……（答）

$\cos 2\alpha$ の値は，$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ の公式を使えば簡単に値が計算できる。

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{18}{25} = \dfrac{7}{25}$　……（答）

※　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{32}{25} - 1 = \dfrac{7}{25}$ でも計算でき，

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16-9}{25} = \dfrac{7}{25}$ でも計算できる。

問　α が第 1 象限の角で，$\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求めなさい。

問・解答
$\sin 2\alpha = \dfrac{120}{169}$，$\cos 2\alpha = -\dfrac{119}{169}$