第46回　第3章　三角関数　[加法定理]

加法定理 (2)

加法定理を使って覚えよう！

講師
川﨑宣昭

sin(α＋β), cos(α＋β) と α, β の三角関数との関係について考えます。特に今回は，加法定理を利用して三角関数の値を求めたり，三角関数の公式を確かめることを学習します。

学習のポイント

① 75°, 15° の三角関数の値
② θ＋180° の三角関数の公式を確かめよう！
③ 90°－θ の三角関数の公式を確かめよう！

【加法定理】

[1] $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　（シン　コス　コス　シン）
[2] $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
[3] $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　（コス　コス　シン　シン）
[4] $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

補足：$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

（タン　タン　プラ　タン　イチ　マイ　タン　タン）

75°, 15° の三角関数の値

● sin75° = sin(45° ＋30°) より，[1] の公式を利用

$$\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$$
$$=\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

← $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cancel{\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin45^\circ+\sin30^\circ}$

● sin15° = sin(45° －30°) より，[2] の公式を利用

$$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$$
$$=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

← $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cancel{\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ-\sin30^\circ}$

● $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$ より，［3］の公式を利用

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

⬅ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

● $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$ より，［4］の公式を利用

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

⬅ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\theta + 180^\circ$ の三角関数の公式を確かめよう！

● ［1］の公式から，

$$\begin{aligned}\sin(\theta + 180^\circ) &= \sin\theta \cos 180^\circ + \cos\theta \sin 180^\circ \\ &= \sin\theta \times (-1) + \cos\theta \times 0 \\ &= -\sin\theta\end{aligned}$$

⬅ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

● ［3］の公式から，

$$\begin{aligned}\cos(\theta + 180^\circ) &= \cos\theta \cos 180^\circ - \sin\theta \sin 180^\circ \\ &= \cos\theta \times (-1) - \cos\theta \times 0 \\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

⬅ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$90^\circ - \theta$の三角関数の公式を確かめよう！

● ［2］の公式から，

$\sin(90^\circ - \theta) = \sin 90^\circ \cos\theta - \cos 90^\circ \sin\theta$　⬅ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= 1 \times \cos\theta - 0 \times \sin\theta$

$= \cos\theta$

● ［4］の公式から，

$\cos(90^\circ - \theta) = \cos 90^\circ \cos\theta + \sin 90^\circ \sin\theta$　⬅ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= 0 \times \cos\theta + 1 \times \sin\theta$

$= \sin\theta$

● $\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$

$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ$