数学Ⅱ

第45回　第3章　三角関数　[加法定理]

加法定理 (1)

加法定理とは？

講師
川﨑宣昭

sin($\alpha+\beta$), cos($\alpha+\beta$) と α, β の三角関数との関係について考えます。特に今回は，加法定理が必要になる理由と，図を利用して加法定理を証明する方法を学びます。

学習のポイント

① 加法定理の意味
② サインの加法定理
③ コサインの加法定理

加法定理の意味

■加法定理を具体的に説明すると ‥‥‥

45° と 30° のサイン，コサイン，タンジェントの値がわかっていれば，

45° + 30° や 45° − 30° のサイン，コサイン，タンジェントの値が求められる定理である。すなわち，75° や 15° のサイン，コサイン，タンジェントの値が求められる定理である。

■加法定理が使える条件は？

α, β のサイン，コサイン，タンジェントの値がわかっている。

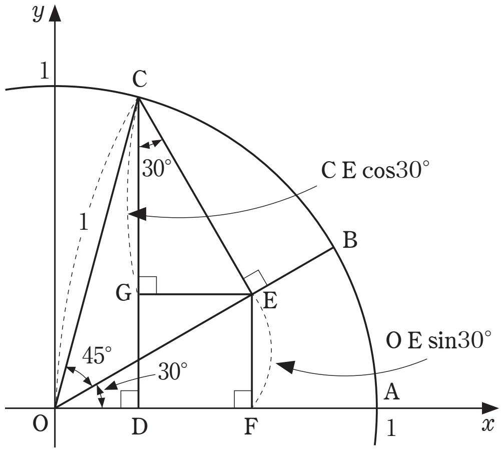
⬇

$\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ のサイン，コサイン，タンジェントの値が公式で求められる。

※加法定理の学習では，主にサインとコサインの加法定理を中心に学習し，
タンジェントの加法定理は結果だけを紹介することにとどめます。

サインの加法定理

- x 軸上に A(1 , 0) をとる。
- 単位円の周上に点 B，C を，図のようにそれぞれ，
  ∠ AOB = 30°
  ∠ BOC = 45°
  となるようにとる。
- C から x 軸に垂線 CD を引く。
- C から OB に垂線 CE を引く。
- E から x 軸に垂線 EF を引く。
- E から CD に垂線 EG を引く。
- ∠ DCE = 30° となる。
  （∠ OCE = 45°，∠ OCD = 15° を利用）



●△OCD に着目すると，CO = 1 であるから，

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = CD = CG + GD$ …… ①

● $CG = \boxed{CE}\cos 30^\circ = \boxed{\sin 45^\circ}\cos 30^\circ$ ……………… ②

同じ値

● $GD = EF = \boxed{OE}\sin 30^\circ = \boxed{\cos 45^\circ}\sin 30^\circ$ ……… ③

同じ値

●①，②，③から，

$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ$

●他の角度でもこの形の式が成り立つと考え，45° を α，30° を β におきかえて，

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

● $\cos(-\beta) = \cos\beta$，$\sin(-\beta) = -\sin\beta$ を使えば，

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

【サインの加法定理】

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

シン　コス　コス　シン ➡ のように覚えてみよう！

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

コサインの加法定理

●前ページの図で△OCD に着目すると，CO = 1 であるから，

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = OD = OF - DF$ …… ④

● $OF = \boxed{OE}\cos 30^\circ = \boxed{\cos 45^\circ}\cos 30^\circ$ ……………… ⑤

同じ値

● $DF = GE = \boxed{CE}\sin 30^\circ = \boxed{\sin 45^\circ}\sin 30^\circ$ ……… ⑥

同じ値

●④，⑤，⑥から，

$\cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ$

●他の角度でもこの形の式が成り立つと考え，45° を α，30° を β におきかえて，

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

● $\cos(-\beta) = \cos\beta$，$\sin(-\beta) = -\sin\beta$ を使えば，

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\{\alpha + (-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

【コサインの加法定理】

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

コス　コス　シン　シン ➡ のように覚える。引き算になっている！

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

補足：タンジェントの加法定理は，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ となっており，覚え方は，

「左辺 → 右辺の分子 → 右辺の分母」の順に

タン　タン　プラ　タン　イチ　マイ　タン　タン と符号まで含めて覚えよう。

サインとコサインの加法定理を利用して証明できるので，挑戦してみよう！