

三角関数の相互関係 (1)

三角関数の相互関係

講師
水谷信也

一般角 θ の $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の間に成り立つ相互関係とは何かについて学びます。それぞれの値の間にどのような関係があるのかについて調べてみましょう。

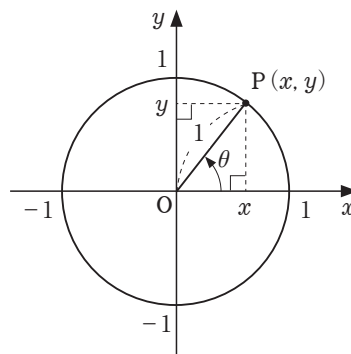
学習のポイント

- ① 単位円とは何か
- ② 単位円と動径による三角関数の定義
- ③ 三角関数の相互関係

単位円とは何か

原点を中心とする半径1の円を単位円という。

- 中心が原点O (0, 0)
- Pは、単位円の周上を回転
- 動径はOP
- $OP=1$



単位円と動径による三角関数の定義

角 θ の動径と単位円との交点を $P(x, y)$ とすると、

$OP = 1$ より、

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \text{ となる。}$$

よって、 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$

三角関数の相互関係

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ より、}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

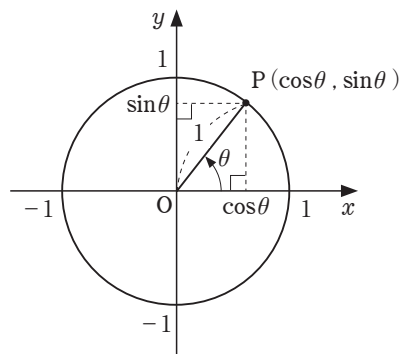
また、点Pの座標 (x, y) は、 $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。
さらに、点Pが単位円の周上にあることから

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

よって、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

このように、一般角の三角関数についても、数学Ⅰで学んだ三角比と同様に、次の公式が成り立つ。



📌 原点を中心とする半径1の円の方程式は $x^2 + y^2 = 1$

【三角関数の相互関係】

(1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ (2) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

例 θ が第3象限の角で、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めなさい。

解答

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{ より} \\ \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

θ が第3象限の角であるから、 $\sin \theta < 0$ したがって、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -\sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= -\frac{4}{5} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

 $\sin \theta$ の符号

