不等式の表す領域 (3)

円を境界線とする領域

講師
渡部儀隆

方程式 $x^2 + y^2 = 4$ は，原点を中心とする半径２の円を表しています。

では，不等式 $x^2 + y^2 < 4$ や $x^2 + y^2 > 4$ がどのような領域を表すか考えてみましょう。

学習のポイント

① 円の方程式と不等式
② 不等式と円の内部・外部
③ 領域を表す不等式

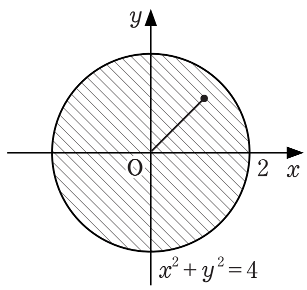
円の方程式と不等式

不等式 $x^2 + y^2 < 4$ を満たす点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，中心Oとの距離は $\mathrm{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$ であるから，不等式 $x^2 + y^2 < 4$ は，

$\mathrm{OP}^2 < 4$ すなわち $\mathrm{OP} < 2$

となる。これは点Pが円の**内部**にあることを示している。

同様に，不等式 $x^2 + y^2 > 4$ を満たす点Pの集まりは，円の**外部**であることが示される。

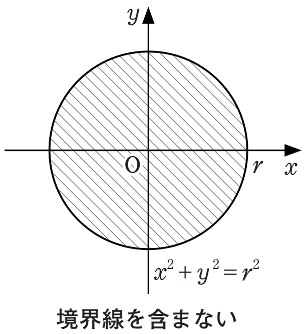


境界線を含まない

不等式と円の内部・外部

$x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域は

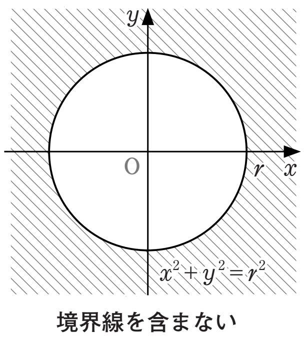
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の内部



境界線を含まない

$x^2 + y^2 > r^2$ の表す領域は

円 $x^2 + y^2 = r^2$ の外部



境界線を含まない

等号のついた不等号を用いた不等式 $x^2 + y^2 \leqq r^2$，$x^2 + y^2 \geqq r^2$ の表す領域はそれぞれ境界線つまり円を含む。

不等式 $(x-1)^2 + (y-2)^2 < 4$ の表す領域は右図の斜線部分となる。ただし，境界線を含まない。

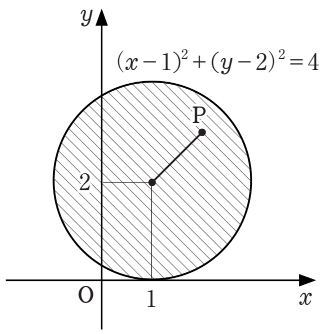
一般に次のことが成り立つ。

$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ の表す領域は，

円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の内部

$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ の表す領域は，

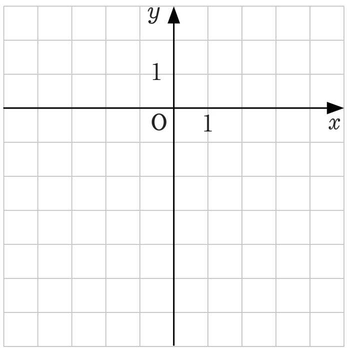
円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の外部

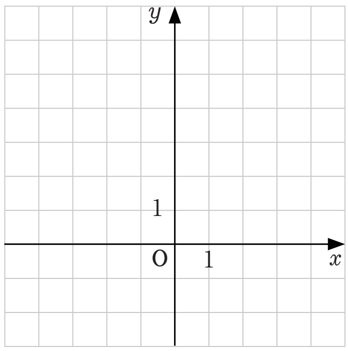


境界線を含まない

問 1　次の不等式の表す領域を図示しなさい。

(1)　$(x-1)^2+(y+2)^2>4$　　　(2)　$x^2+(y-2)^2\leqq 9$

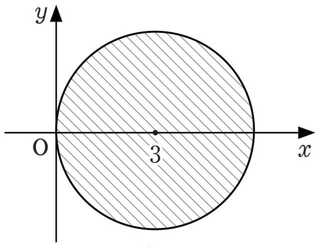




領域を表す不等式

領域が与えられたとき，その領域を不等式で表してみよう。

例　右図の斜線部分の領域を表す不等式を求めなさい。

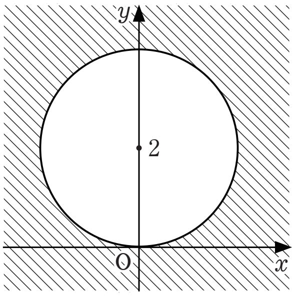


境界線を含む

解答

点 (3, 0) を中心とする半径 3 の円の内部であり，
境界線を含むから，　$(x-3)^2+y^2\leqq 9$

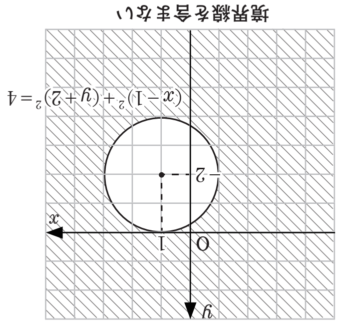
問 2　次の図の斜線部分の領域を表す不等式を求めなさい。



境界線を含む

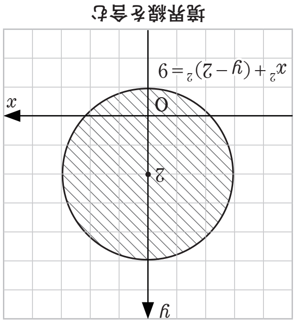
問 1・解答

(1)



境界線を含まない

(2)



境界線を含む

問 2・解答

点 (0, 2) を中心とする半径 2 の円の外部であり，境界線を含むから

$x^2+(y-2)^2\geqq 4$