第30回　第２章　図形と方程式　[円の方程式]

円と直線

共有点の個数

講師
渡部儀隆

円と直線の共有点の求め方について学び，位置関係についてまとめましょう。

学習のポイント

① 円と直線の共有点
② 共有点の個数と２次方程式
③ 判別式と共有点の個数

円と直線の共有点

円と直線の共有点の座標は，円の方程式と直線の方程式を組み合わせた連立方程式の解として求めることができる。

例　円 $x^2 + y^2 = 2$ と次の直線の共有点の座標を求めなさい。

(1)　$y = x$

(2)　$y = x - 2$

解答　(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y = x & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

において，②を①に代入すると

$x^2 + x^2 = 2$

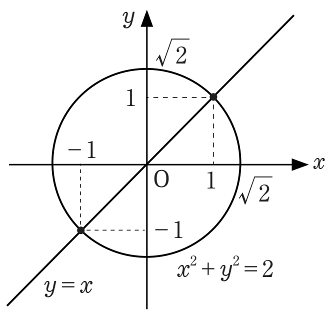
整理すると，$x^2 = 1$ となり　$x = \pm 1$

$x = 1$ のとき，②より　$y = 1$

$x = -1$ のとき，②より　$y = -1$

よって，共有点の座標は

$(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$



２点で交わる

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ y = x - 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

において，④を③に代入すると

$x^2 + (x - 2)^2 = 2$

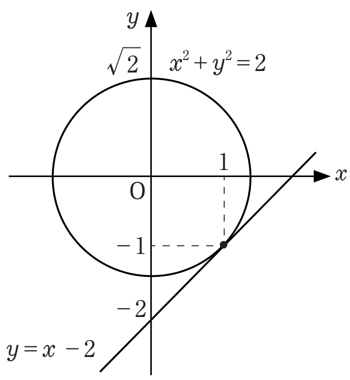
整理すると　$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$ より　$x = 1$

これを④に代入すると　$y = -1$

よって，共有点の座標は

$(1,\ -1)$



接する

共有点の個数と２次方程式

例 では，円と直線の共有点は２個または１個だった。ここでは共有点の個数について考えてみよう。

円 $x^2 + y^2 = 2$ と直線 $y = x + 3$ は，右の図のように共有点をもたない。

このとき，連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ y = x + 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

において，②を①に代入すると

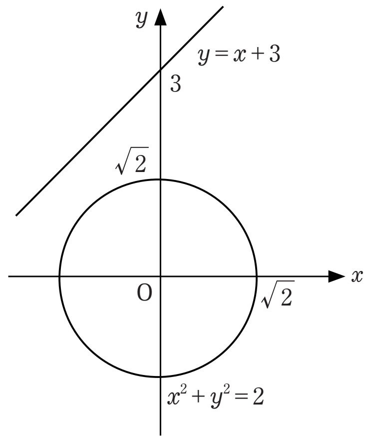
$$x^2 + (x + 3)^2 = 2$$

整理すると，$2x^2 + 6x + 7 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots③$

この２次方程式の判別式 D は，

$D = 6^2 - 4 \times 2 \times 7 = -20 < 0$　となる。

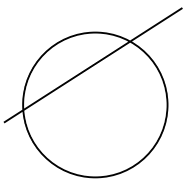
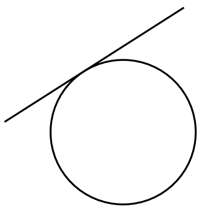
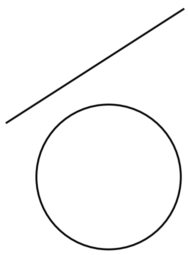
よって，③は実数解をもたない。



離れている

判別式と共有点の個数

円と直線の方程式を連立して得られる２次方程式の判別式 D と共有点の個数の関係は，次のようになる。

判別式	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
共有点の個数	２個	１個	なし
円と直線の位置関係	２点で交わる 	接する 	離れている 

思い出そう！　判別式 D

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 D は，

$$D = b^2 - 4ac$$