平面上の点の座標 (2)

三角形の形状・平面上の内分点

講師
川﨑宣昭

平面上の２点間の距離の求め方を利用して，三角形の形状を調べます。また，平面上の内分点の座標を求められるようにします。

学習のポイント

① 三角形の形状
② 平面上の内分点の座標
③ 内分点の座標の求め方

三角形の形状

■形状とは？

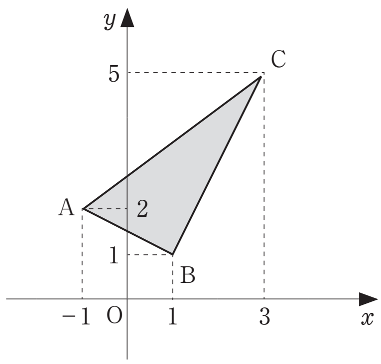
三角形にはさまざまな形（**形状**）がありますが，辺の長さの関係を調べるとどのような三角形であるのかがわかってきます。

●正三角形……………３辺の長さが等しい。
●二等辺三角形………２辺の長さが等しい。
●直角三角形…………三平方の定理が成り立つ。

などの例があります。

問

３点 A(−1，2)，B(1, 1)，C(3，5) を頂点とする三角形が直角三角形であることを示しなさい。



解答

直角三角形であることを示すので，三平方の定理が成り立つことをいえばよい。

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$
$$BC=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}$$
$$AC=\sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{25}$$

であるから，

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

よって，△ ABC は∠ B を直角とする直角三角形である。

平面上の内分点の座標

例

2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) を結ぶ線分を 3：2 に内分する点 P の座標を求めてみよう。

解答

右図で，点 A，P，B から x 軸に垂線 AA′，PP′，BB′ を引く。

P が AB を 3：2 に内分する点であれば，P′ も A′B′ を 3：2 に内分する点である。（中学校で学習した平行線の性質を利用しています。）

したがって，P(x, y) とすると，

$$x = \frac{2x_1 + 3x_2}{3+2} = \frac{2x_1 + 3x_2}{5}$$

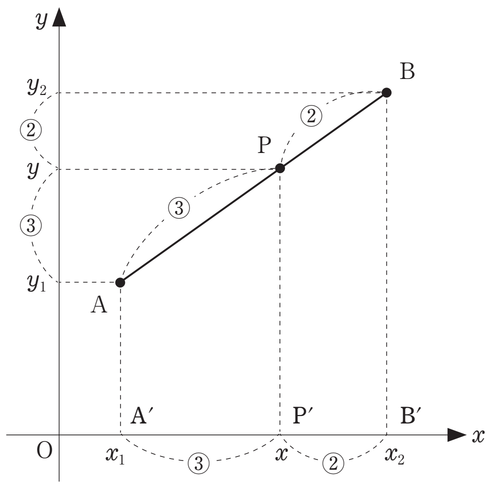
y も x の場合と同じように考えて，

$$y = \frac{2y_1 + 3y_2}{3+2} = \frac{2y_1 + 3y_2}{5}$$

よって，点 P の座標は，

$$\left(\frac{2x_1 + 3x_2}{5},\ \frac{2y_1 + 3y_2}{5} \right)$$ （答）

文字 x を y に換えただけの式！



上の例と同じように考えれば，次のことが成り立つ。

【平面上の内分点の座標】

2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2)を結ぶ線分 AB を $m：n$ に内分する点の座標は，

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$$

とくに，中点の座標は，

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

内分点の座標の求め方

例

2点A(−2, −1), B(2, 7)を結ぶ線分ABを3：1に内分する点の座標，および中点Mの座標を求めてみよう。

解答

$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$の公式で，

$x_1=-2,\ y_1=-1,\ x_2=2,\ y_2=7$

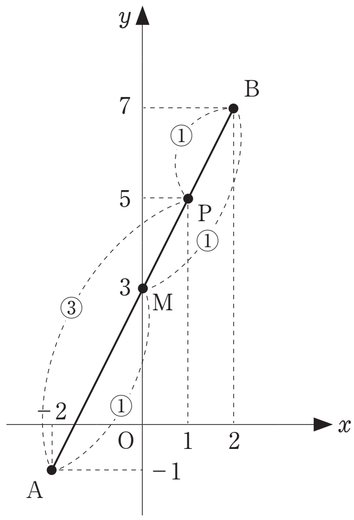
$m=3,\ n=1$

を代入する。

$$x=\frac{1\times(-2)+3\times2}{3+1}=\frac{4}{4}=1$$

$$y=\frac{1\times(-1)+3\times7}{3+1}=\frac{20}{4}=5$$

より，P(1, 5)　　（答）



中点の座標は，

$$x=\frac{(-2)+2}{2}=0,\ y=\frac{(-1)+7}{2}=3$$

より，M(0, 3)　　（答）