第16回　第1章　方程式・式と証明　[式と証明]

不等式の証明

講師
水谷信也

不等式 $A \geqq B$ が成り立つことを証明する方法について学びましょう。

学習のポイント
① 不等式 $A \geqq B$ の証明方法
② 相加平均と相乗平均
③ 相加平均と相乗平均の関係を利用した不等式の証明

不等式 $A \geqq B$ の証明方法

不等式 $A \geqq B$ が，いつでも成り立つことを証明する方法について勉強しよう。復習になるが，$A \geqq B$ という不等式は，A は B よりも大きいか，もしくは等しいことを表していた。

不等式 $A \geqq B$ が成り立つことを証明するには，左辺から右辺をひいた，$A - B$ を計算して，$A - B \geqq 0$ となることを示せばよい。左辺から右辺をひいて，0 以上になることを示す。これが，不等式 $A \geqq B$ が成り立つことの証明方法である。

例1　不等式 $x^2 + 1 \geqq 2x$ が成り立つことを証明してみよう。

解答　(左辺)－(右辺)を計算すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (x^2+1) - (2x)\\ &= x^2 - 2x + 1\\ &= (x-1)^2\end{aligned}$$

⬅ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

ここで，$(\text{実数})^2 \geqq 0$ であるから　⬅どんな実数も2乗すれば0以上となる。

$$(x-1)^2 \geqq 0$$

したがって，(左辺)－(右辺)$\geqq 0$ となるから，$x^2 + 1 \geqq 2x$ が成り立つ。

なお，$x = 1$ のとき，等号が成り立つ。　⬅ $x-1=0$、すなわち $x=1$ のとき，(左辺)－(右辺)$=0$となり、等号が成り立つ。

相加平均と相乗平均

数学の世界には，平均という考え方がいくつかある。ここでは，相加平均と相乗平均の2つの平均について考える。

2つの正の実数 a，b に対して

$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**，

$\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という。

相加平均と相乗平均の間には，次の不等式の関係が成り立つ。

【相加平均と相乗平均】

> $\boldsymbol{a > 0, b > 0}$ **のとき** $\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} \geqq \sqrt{\boldsymbol{ab}}$
>
> **等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a = b}$ のときである**

!（相加平均）≧（相乗平均）

【証明】（左辺）−（右辺）を計算すると

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

⬅ $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ であるから $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqq 0$

⬅ (実数)$^2 \geqq 0$

したがって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b} = 0$

すなわち，$a = b$ のときである。

相加平均と相乗平均の関係を利用した不等式の証明

例2　$x > 0$ のとき，不等式 $x + \dfrac{1}{x} \geqq 2$ が成り立つことを，相加平均と相乗平均の関係を用いて証明してみよう。

解答

$x > 0$ であるから，$\dfrac{1}{x} > 0$

よって，$\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \geqq \sqrt{x \times \dfrac{1}{x}}$

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geqq 1$$

したがって，$x + \dfrac{1}{x} \geqq 2$

なお，等号が成り立つのは $x = \dfrac{1}{x}$ のときで，$x > 0$ より $x = 1$ のときである。