等式の証明

講師
水谷信也

文字を含んだ等式が成り立つかどうかを証明する方法について学びましょう。

学習のポイント

① 等式の証明とは？
② 等式 $A=B$ の証明方法
③ 条件がついているときの等式の証明

等式の証明とは？

等号（＝）を用いて表した式を等式という。

$3x-1=0$ や $x^2=2x$ などは，等式の例である。$3x-1=0$ のような等式のことを1次方程式という。そして，$x^2=2x$ のような等式のことを2次方程式と言う。

実は,「等式」には大きく分けて2つの種類がある。

1つは、1次方程式や2次方程式のように，**x にある特定の値を代入したときだけ成り立つ等式**である。

例えば, $3x-6=0$ は, x が2のときに等式は成り立つが, 2以外の値を代入しても0にはならない。

それに対して，例1 の $(x+1)^2-2x=(x-1)^2+2x$ の等式は，x に**どんな値を代入しても成り立つ等式**である。等式の証明とは，これらの式について証明することである。

等式 $A=B$ の証明方法

等式 $A=B$ が成り立つことを証明するには，左辺と右辺を別々に計算して同じ式になることを示せばよい。

また、(左辺) − (右辺) を計算して0になることを示す方法もある。

例1　等式 $(x+1)^2-2x=(x-1)^2+2x$ が成り立つことを証明してみよう。

解答　左辺と右辺を別々に計算すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (x+1)^2-2x\\
&= x^2+2x+1-2x\\
&= x^2+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (x-1)^2+2x\\
&= x^2-2x+1+2x\\
&= x^2+1
\end{aligned}
$$

したがって，(左辺) ＝ (右辺) となるから，$(x+1)^2-2x=(x-1)^2+2x$ が成り立つ。

条件がついているときの等式の証明

例2 $x + y = 1$ のとき，等式 $x^2 + y = y^2 + x$ が成り立つことを証明しなさい。

解答 $x + y = 1$ であるから

$$y = 1 - x$$

よって

$$(\text{左辺}) = x^2 + (1 - x) = x^2 - x + 1$$

$$(\text{右辺}) = (1 - x)^2 + x = x^2 - 2x + 1 + x = x^2 - x + 1$$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，$x^2 + y = y^2 + x$ が成り立つ。

例3 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき，等式 $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ が成り立つことを証明しなさい。

解答 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ とおくと

$\dfrac{a}{b} = k$ より $a = bk$，$\dfrac{c}{d} = k$ より $c = dk$

よって

$$(\text{左辺}) = \frac{bk-b}{b} = \frac{b(k-1)}{b} = k - 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{dk-d}{d} = \frac{d(k-1)}{d} = k - 1$$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから，$\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ が成り立つ。