

## 高次方程式 (2)

講師  
矢作裕滋

### 学習のポイント

3次以上の方程式を解くのに、因数分解を用いてみましょう。そして、因数定理を利用した解法を学習しましょう。

- ① 因数分解による解法 ～文字でおき換える～
- ② 因数定理の復習
- ③ 因数定理を利用した解法

### 因数分解による解法 ～文字でおき換える～

例1 方程式  $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$  を解け。

#### 解答

$$x^2 = X \text{ とおくと}$$

$$X^2 + 3X - 4 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(X - 1)(X + 4) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 4) = 0$$

←  $X$  を  $x^2$  にもどす

$$\text{ゆえに、} x^2 - 1 = 0 \quad \text{または、} x^2 + 4 = 0$$

$$\text{したがって、} x = \pm 1, \pm 2i$$

問1 次の方程式を解きなさい。

(1)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(2)  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

### 因数定理の復習

今まで整式の除法、剰余の定理、因数定理について学んだ。ここでは、これらのことを用いて3次方程式を解くことを学ぶ。その中でも一番重要なのが因数定理である。ここで、因数定理について復習しておこう。

#### 【因数定理】

整式  $P(x)$  において

$$P(\alpha) = 0 \iff x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数である}$$

**因数定理を利用した解法**

**例2** 次の方程式を解きなさい。

(1)  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

(2)  $x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$

**解答**

(1)  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$  とおくと

$$P(1) = 1^3 - 4 \times 1^2 - 7 \times 1 + 10 = 0$$

であるから、 $x - 1$  は  $P(x)$  の因数である。

右のわり算より

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 3x - 10)$$

よって

$$(x - 1)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

または、 $x + 2 = 0$

または、 $x - 5 = 0$

したがって、 $x = 1, -2, 5$

(2)  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$  とおく

$$P(2) = 2^3 - 5 \times 2^2 + 7 \times 2 - 2 = 0$$

であるから、 $x - 2$  は  $P(x)$  の因数である。

右のわり算より

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 1)$$

よって

$$(x - 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

または、 $x^2 - 3x + 1 = 0$

したがって、 $x = 2, x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

←定数項 10 の約数  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$  を代入して調べる。

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 10 \\ x - 1 \overline{) x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ 10} \\ -3x^2 - 7x \phantom{+ 10} \\ \underline{-3x^2 + 3x} \phantom{+ 10} \\ -10x + 10 \\ \underline{-10x + 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 1 \\ x - 2 \overline{) x^3 - 5x^2 + 7x - 2} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 10} \\ -3x^2 + 7x \phantom{+ 10} \\ \underline{-3x^2 + 6x} \phantom{+ 10} \\ x - 2 \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array}$$

**問2** 次の方程式を解きなさい。

- (1)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
- (2)  $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
- (3)  $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$
- (4)  $x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$

Blank area for student solutions.

**問1・解答**

(1)  $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$

**問2・解答**

(1)  $x = 1, 2, 3$

(2)  $x = 1, -3, 5$

(3)  $x = 2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(4)  $x = -2, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$